УДК 621.391.268

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ОБЪЕКТОВ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯХ

В.В. ПОПОВСКИЙ
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Проаналізовано два основних види стохастичних моделей, що використовуються при вирішенні задач в телекомунікаціях: моделі, які ґрунтуються на ймовірностях випадкових об'єктів, та моделі самих цих об'єктів, що характеризують стани. Стверджується, що другий підхід, в силу більшого узагальнення, є точнішим, більш адекватним і конструктивним.

In the given article analyzed two basic kinds of the stochastic models are analyzed. These models are used for solving problems in telecommunications. These are the models, based on probabilities of parameters of casual objects and model of these objects, describing conditions. It is confirmed, that the second approach is more exact, adequate and constructive, by virtue of a greater generality.

Проанализировано два основных вида стохастических моделей, используемых при решении задач в телекоммуникациях: модели, основанные на вероятностях параметров случайных объектов, и модели самих этих объектов, характеризующих состояния. Утверждается, что второй подход, в силу большей общности, более точен, адекватен и конструктивен.

Любая современная телекоммуникационная система (ТКС) или ее фрагмент представляют собой стохастический динамически функционирующий объект, случайный характер которого определяется множеством факторов, основным из которых является случайный и нестационарный трафик. Как любая сложная система, ТКС характеризуется множеством физических и математических моделей, одни из этих моделей могут рассматриваться как детерминированные, другие – как чисто случайные или же, как смешанные. Принадлежность анализируемого объекта к тому или иному виду моделей определяет исследователь, исходя из содержания решаемой задачи.

От соотношения уровней случайной и регулярной компонент в описании объекта как правило зависит точность и эффективность решаемой задачи. Так, при рассмотрении случайного электромагнитного поля $\vec{E}(t)$ используют модели частично конкретных или частично поляризованных полей. Соотношение компоненты случайной неполяризованной интенсивности поля $I_{НП}$ ко всей его интенсивности I_{Σ} определяет степень поляризации этого поля:

$$m = \frac{I_{НП}}{I_{\Sigma}} = \frac{I_{НП}}{I_{ПП} + I_{НП}}, \qquad (1)$$

где $I_{ПП}$ – интенсивность полностью поляризованной части поля.

От соотношения (1) зависит качество решения тех задач, где важно знание мощности полезного сигнала на согласованной нагрузке P: пространственно-

временного или поляризационно-временного кодирования в системах MIMO, согласованного приема, поляризационной режекции помех, модуляции и др.

Эта мощность равна:

$$P = \left[\frac{1-m}{2} + m\cos^2\frac{\delta}{2}\right] S_{эф} П, \qquad (2)$$

где δ – угол, определяющий различие поляризации поля и приемной антенны с эффективной площадью $S_{эф}$; $П$ – значение модуля вектора Пойнтинга принимаемого сигнала в точке приема.

Аналогичные (1) и (2) соотношения могут быть записаны для частично когерентного поля и степени его когерентности.

В общем же случае любой физический объект можно рассматривать как случайный. При этом случайная часть может быть сосредоточена как в самом объекте, так и в тех инструментах, с помощью которых отображают данный объект и формируют наблюдения об этом объекте.

Поскольку любая модель лишь приближенно соответствует моделируемому объекту, то часто допустимыми считаются отклонения параметров модели до 20%. Поэтому, если объект характеризуется незначительным уровнем случайной компоненты, то модель такого объекта часто считают детерминированной, что облегчает решение задачи.

В тех случаях, когда не удается свести задачу к чисто детерминированной, приходится ее решать как стохастическую. Имеется два основных приема решений, каждый из которых основывается на своих математических моделях.

1. Метод моделирования и решений стохастических задач с использованием результатов теории вероятностей. В данном методе рассматривается не сам случайный объект ξ, а его вероятностные характеристики: функция распределения вероятностей $F(x) = P\{\xi \le x\}$, где x – неслучайная переменная величина, определяющая вероятность непревышения ее случайной величиной ξ.

Другая часто используемая вероятностная характеристика – распределение вероятностей этой переменной

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ где } F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx. \qquad (3)$$

Данный метод моделирования нашел широкое применение в практике, в том числе в радиотехнике и связи, где задачи сводятся к получению параметров различных объектов, обеспечивающих желаемое значение вероятности. Важным достоинством данного метода является то, что все преобразования переменной x и ее вероятностей $p(x)$ могут осуществляться с помощью обычных интегро-дифференциальных операторов.

Метод отлично зарекомендовал себя в тех задачах, где случайные объекты обладают свойствами случайных величин. Поэтому при использовании обсуждаемого метода моделирования важно априори определить, к какому типу относится анализируемый случайный объект: величине, процессу или случайному полю. Если же

возникает необходимость отображения динамических свойств случайных объектов, то модель случайных величин уже не работает. Необходимый при этом переход к вероятностям случайных процессов и полей при представлениях $F(\vec{x})$ и $p(\vec{x})$ оказывается громоздким n-мерным, где n-число сечений, в которых представлены эти процессы или поля. Использование предположения об эргодичности процессов имеет ограниченное практическое применение в силу невозможности решений динамических и нестационарных задач, являющихся основными в телекоммуникациях. Вместе с тем, следует отметить, что, несмотря на свою ограниченность, данный метод продолжает широко использоваться в теории связи и других прикладных науках.

2. Метод моделирования и решения стохастических задач, использующий представления о самих случайных объектах: случайных величинах, случайных процессах или случайных полях. Среди наиболее конструктивных таких моделей являются модели диффузионного типа, в частности модели марковских процессов. Такой процесс, включающий случайную и детерминированную компоненты, представим в виде:

$$x(t) = x(0) + \int_T \theta(t)dt + \int_T \Phi(t)dW(t), \qquad (4)$$

где $x(0)$ – регулярная постоянная составляющая; $\int_T \theta(t)dt$ – регулярно изменяемая компонента, описываемая обычным интегралом Лебега; $\int_T \Phi(t)dW(t)$ – случайно изменяемая компонента, порожденная винеровским процессом $W(t)$, описываемая интегралами Ито или Стратоновича.

Кроме интегрального представления (4), часто используется и представление дифференциальным управлением состояния:

$$dx(t)/dt = F(t)x(t) + G(t)\xi(t), \qquad (5)$$

где $F(t) = \alpha$ – коэффициент состояния процесса $x(t)$, численно равный обратной величине интервала корреляции этого процесса $\alpha = \tau_{кор}^{-1}(x)$; $G(t)$ – коэффициент генерации, $G(t) = \sigma_x^2/2\alpha$, определяющий уровень случайно изменяющейся компоненты; $\xi(t)$ – гауссов белый шум (порождающий процесс).

В соответствии с теоремой Дуба случайный процесс, представимый уравнением состояния (5), относится к классу марковских. Часто уравнение (5) называют уравнением формирующего фильтра.

Важным достоинством марковских моделей (4) и (5) является возможность получения адекватных моделей для динамических, в том числе нестационарных, случайных объектов. Достаточно хорошо разработанная прикладная математика для марковских процессов позволяет получать оптимальные оценки $\hat{x}(t)$, используя фильтры Калмана или Стратоновича, находить оптимальные алгоритмы управления, используя принцип двойственности с алгоритмами оценки и теорему о разделении алгоритмов стохастического управления, синтезировать различные процедуры обработки случайных сигналов, аппроксимируемых широким спектром моделей: случайных величин, процессов или полей. Так, для случайной величины x

уравнение состояния (5) вырождается: $dx(t)/dt = 0$, при этом алгоритм оценки по методу Калмана-Бьюси преобразовывается в процедуру стохастической аппроксимации или процедуру Роббинса-Монро. Для случайного поля состояние $x(t)$ становится вектором, а коэффициенты $F(t)$ и $G(t)$ – матрицами, недиагональные элементы которых определяют уровни взаимных связей между компонентами $x_i(t)$. Следует заметить, что адекватной моделью ТКС может быть только n-мерное случайное поле $\vec{x}(t)$, где взаимные связи определяют главные свойства (целостность, эмерджентность) этой сложной организационно-технической системы. При этом взаимные связи в этой системе носят как вероятностный за счет корреляции, так и регулярный, функциональный характер.

В рассматриваемом втором методе решений не исключается, а наоборот – широко используются также результаты теории вероятностей и математической статистики. Так, два состояния $x(t_1)$ и $x(t_2)$ связаны между собой переходной вероятностью:

$$x(t_2) = p(t_2 / t_1) \cdot x(t_1), \qquad (6)$$

где $p(t_2 / t_1) = \exp\{-\Delta t / \tau_{кор}\}$ – вероятность перехода из состояния в момент времени t_1 в момент t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Выводы

Таким образом, можно считать, что второй метод, основанный на непосредственном моделировании состояний случайных объектов, обладает значительно большей общностью, поскольку позволяет получать адекватные конструктивные модели не только случайных величин, но и процессов и полей. Только второй метод пригоден для моделирования динамических систем, в том числе ТКС. Второй метод является обобщением первого. Так, можно утверждать, что любое оптимальное решение для любого из рассматриваемых случайных объектов, полученное вторым методом, наверняка окажется не хуже решения, полученного первым, поскольку во втором методе используется информация обо всем случайном объекте, в то время как в первом – используется его вероятностная характеристика, а не сам объект.

Список литературы:

1. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы – М.: ИЛ, 1956. – 605 с.
2. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции: Пер. с англ. Т.1. – М.: Сов.Радио, 1972. – 744 с.
4. *Родимов А.П., Поповский В.В.* Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов в линиях связи. – М.: Радио и связь, 1984. – 272 с.
5. *Поповский В.В., Олейник В.Ф.* Математические основы управления и адаптации в телекоммуникационных системах. – Х.: СМИТ, 2011. – 368 с.
6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.