УДК 681.513

ФОРМИРОВАНИЕ КВАДРАТУРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИГНАЛОВ

Н.С. ПАСТУШЕНКО
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Проаналізовано відомі процедури формування квадратурної складової аналітичного сигналу й оцінена їхня роль і точність. Досліджено характеристики точності чисельних процедур для одного класу сигналів.

Known procedures of creation of a quartered component of an analytical signal are parsed and their role and accuracy is estimated. Characteristics of accuracy of numerical procedures for one class of signals are researched.

Проанализированы известные процедуры формирования квадратурной составляющей аналитического сигнала и оценена их роль и точность. Исследованы характеристики точности численных процедур для одного класса сигналов.

Введение

В современных телекоммуникационных системах при повышении скорости передачи по витой паре значительно сокращается битовый интервал и кодовое расстояние. Это приводит к существенному усложнению процедур обработки сигналов как на передаче, так и при приеме. Примером может служить оборудование цифровых абонентских линий (Digital Subscriber Line, DSL), в котором очень широко используются квадратурные схемы обработки данных. При этом особое место занимают вопросы формирования квадратурной составляющей сигнала, которая существенно влияет на достоверность и оперативность доступа к передаваемых данным. Значительные трудности возникают при восстановлении квадратурной составляющей при малом отношении сигнал/шум и в условиях априорной неопределенности, когда отсутствует информация о несущем (опорном) колебании.

Обусловлено это тем, что известные методы анализа цифровых данных в виде временных рядов ориентированы на обработку линейных и стационарных сигналов. Только в конце прошлого тысячелетия начали развиваться методы анализа нелинейных, но стационарных и детерминированных систем, и линейных, но нестационарных данных (Вейвлет-анализ, распределение Wagner-Ville и др.). Между тем, большинство регистрируемых сигналов от реальных физических систем в той или иной мере являются нелинейными и нестационарными. Несмотря на ограничения, доказанные достаточно давно в известных теоремах Бедрозиэна [1] и Наттолла [2], анализ этих сигналов осуществляется традиционными методами, полагая справедливыми упрощения, особенно относительно базиса (как правило, гармонического) обрабатываемых данных.

Вместе с тем, со средины девяностых годов прошлого столетия делаются попытки разработки процедур обработки нелинейных нестационарных сигналов [3, 4]. Процедуры EMD-HSA (эмпирический метод декомпозиции – Гильбертов спектральный анализ) были предложены Норденом Е. Хуангом в 1995 в США (NASA) для

изучения поверхностных волн тайфунов [3], с обобщением на анализ произвольных временных рядов коллективом соавторов в 1998 г [4]. К сожалению, справедливость указанных процедур теоретически не доказана. Предложенные эмпирические процедуры ориентированы на формирование адаптивного базиса на основе обрабатываемых данных, а затем к этому базису применяется преобразование Гильберта. Такой подход позволяет более точно восстановить квадратурную составляющую анализируемого сигнала. К сожалению, имеют место значительные краевые эффекты и ошибка аппроксимации $(\Delta\varepsilon(t))$ с помощью формируемого базиса, а также неточности, обусловленные преобразованием Гильберта.

I. Постановка задачи в общем виде

Известно, что качество результатов цифровой обработки во многом зависит от возможностей регистрации приемным устройством параметров аналитического (комплексного) сигнала, который имеет следующий вид

$$s(t) = A(t)\exp(j(\omega_o t + \varphi(t))), \quad (1)$$

где $A(t)$ – множитель амплитудной огибающей; ω_o – несущая частота сигнала, определяющая его спектр; $\varphi(t)$ – фазовая функция сигнала; t – текущее время.

Из аналитического сигнала можно выделить вещественную часть

$$s_b(t) = \mathbf{Re}(s(t)) \quad (2)$$

и мнимую часть

$$s_i(t) = \mathbf{Im}(s(t)), \quad (3)$$

которую, иногда, называют квадратурным дополнением вещественного сигнала.

С учетом введенных обозначений, аналитический сигнал может быть представлен в виде

$$s(t) = s_b(t) + js_i(t). \quad (4)$$

Зная указанные составляющие, можно достаточно просто определить амплитудную огибающую как модуль аналитического сигнала

$$A(t) = |s(t)| = \sqrt{s_b^2(t) + s_i^2(t)}. \quad (5)$$

При этом полная фаза представляет собой аргумент аналитического сигнала

$$\Psi(t) = \mathbf{arg}(s(t)) = \mathbf{arccos}\frac{s_b(t)}{A(t)} = \mathbf{arcsin}\frac{s_i(t)}{A(t)} = arctg\frac{s_i(t)}{s_b(t)}. \quad (6)$$

Чтобы получить фазовую функцию (или начальную фазу) сигнала, нужно выделить из полной фазы линейное слагаемое $\omega_o t$. Для этого, в свою очередь, необходимо знать значение центральной частоты ω_o. Таким образом,

$$\varphi(t) = \Psi(t) - \omega_o t. \quad (7)$$

Скорость изменения несущего колебания можно рассчитать с использованием следующего соотношения [5]:

$$\omega(t) = \dot{\Psi}(t) = \frac{s_b(t)\dot{s}_i(t) - \dot{s}_b(t)s_i(t)}{A^2(t)}. \quad (8)$$

В ряде радиотехнических приложений (радиосвязь, активная радиолокация, радионавигация и т.д.) квадратурная составляющая (мнимая часть) может быть сформирована аппаратно, например, с помощью фазового детектора. В этом случае предполагается, что известно и используется опорное колебание, и что все составляющие частотных спектров вещественной и квадратурной частей аналитического сигнала имеют фазы, различающиеся на $\pi/2$.

Регистрация вещественной и восстановление квадратурной составляющей, а также уточнение в процессе расчетов большинства параметров аналитического сигнала дают возможности использовать, например, преимущества пространственно-временной обработки и достигать более высокого качества цифровой обработки данных в радиотехнических приложениях.

Вместе с тем, в ряде приложений, таких как акустика, сейсмология, пассивная радиолокация (радиоразведка, радиоперехват излучений), гидролокация регистрируется только вещественная часть сигнала и она подвергается цифровой обработке, что существенно ограничивает ее возможности.

При необходимости квадратурная часть формируется с помощью фильтров (аппаратных или программных), которые выполняют функции фазовращателя или быстрого преобразования Фурье. Следует отметить, что эти процедуры базируются на преобразовании Гильберта [6].

Отклонение, в первую очередь, фазочастотной характеристики фазовращателя от требуемой приводит к искажениям огибающей и к паразитной амплитудной модуляции при синтезе сигнала, что создает нелинейные искажения. Вместе с тем, указанные процедуры, например, для акустических сигналов, должны осуществлять безынерционное преобразование динамического диапазона в широкой полосе частот, от 32 Гц до 16 000 КГц, обеспечивать частотно-независимый фазовый сдвиг сигнала на 90° с погрешностью порядка 0,01 градуса [7]. Величина фазовой погрешности выбирается такой, чтобы возникающие из-за нее пульсации мгновенной амплитуды тонального сигнала не были заметны на слух. При такой фазовой погрешности их уровень не превысит минус 80 дБ [7].

Известные процедуры формирования квадратурной составляющей на базе преобразования Гильберта ориентированы на обработку узкополосных сигналов, и применять их для обработки широкополосных сигналов необходимо с осторожностью. Доказано это достаточно давно в известных теоремах Бедрозиэна [1] и Наттолла [2]. К сожалению, в отечественной научной и учебной литературе мало внимания уделяется этим теоремам. Поэтому ниже приведем их без доказательства.

Теорема Bedrosian (1963) утверждает, что преобразование Гильберта для произведения двух функций *f(t)* и *h(t)* может быть записано как

$$H\left[f(t)h(t)\right] = f(t)H\left[h(t)\right], \tag{9}$$

только если спектры Фурье для $f(t)$ и $h(t)$ являются полностью непересекающимися в частотном пространстве, и частотный диапазон спектра для $h(t)$ более высок, чем для $f(t)$ (т.е. если амплитуда изменяется настолько медленно, что частотные спектры огибающей и несущих волн являются непересекающимися).

Теорема Наттолла для функции $x(t)$ определяет различие между квадратурной составляющей $x_q(t)$ и ее преобразованием Гильберта $x_h(t)$ следующим образом:

$$E = \int_0^{\infty} \left| x_q(t) - x_h(t) \right|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{0} \left| F_q(\omega) \right|^2 d\omega, \tag{10}$$

где $F_q(\omega)$ – спектр квадратурной составляющей функции $x(t)$ [5]. Другими словами, существует несоответствие между Гильбертовым преобразованием и точной квадратурой произвольной функции $x(t)$. Эти теоремы указывают на проблематичность применение преобразование Гильберта к реальным сигналам.

Несмотря на это, преобразование Гильберта широко используется при цифровой обработке, в том числе и акустических сигналов (см. например [7]). Поэтому основная задача данной статьи – синтез процедур формирования квадратурной составляющей для широкополосных сигналов по результатам регистрации вещественной части аналитического сигнала.

При исследовании указанных процедур методом математического моделирования вызывают интерес следующие вопросы:

- математическая модель аналитического сигнала, которая будет использоваться для проверки адекватности и достоверности синтезируемых процедур;

- область применения синтезированных процедур и сравнение их точности, в первую очередь, с преобразованием Гильберта, при восстановлении квадратурной составляющей аналитического сигнала.

II. Модель исследуемого сигнала

Назначение модели сигнала – отладка алгоритмов цифровой обработки, проверка их адекватности, достоверности и точности, в том числе, и процедур восстановления квадратурной составляющей сигналов.

Характеристики сигнала, как и его модели, зависят от характера регистрируемых волновых процессов (акустических, сейсмических и т.д.) и принципа действия регистрирующих устройств.

В данной статье рассмотрим модель сигнала, который исследовался Бедрозиэном, а именно

$$x(t) = k \cdot A(t) \cdot \exp\left(j \cdot (\omega_o t + \varphi(t)) \right), \tag{11}$$

где k – постоянный амплитудный множитель; $A(t)$ – множитель, задающий закон амплитудной модуляции; $\omega_o = 2\pi f_o$ – круговая частота; f_o – несущая частота в Гц.

В рассматриваемом случае будем полагать, что $A(t)$ имеет равномерное распределение в интервале (0, 1) и принимает новое значение на каждом шаге дискретизации. Спектр вещественной части сигнала $x_b(t) = \mathbf{Re}(x(t))$ представлен на рис. 1. При этом $f_o = 1600$ Гц – несущая частота, а частота дискретизации f_d =11025 Гц. Анализ спектра сигнала свидетельствует о значительно более высокой частоте амплитудной модуляции.

Естественно, рассматриваемая модель отличается от акустического сигнала. Вместе с тем, она дает возможность оценить эффективность преобразования Гильберта и послужит основой для разработки более эффективных процедур восстановления квадратурной составляющей. Достоинство этой модели состоит и в том, что можем иметь две составляющих аналитического сигнала. Одна из которых (вещественная) будет использоваться для обработки, а вторая (мнимая) – в качестве контрольного (эталонного) сигнала.

Более того, полученные процедуры могут быть полезны при демодуляции фазоманипулированных сигналов в условиях априорной неопределенности. Известно, что наличие квадратурной составляющей существенно расширяет возможности и качественные характеристики цифровой обработки. Реально для звуковых сигналов квадратурную составляющую необходимо восстановить с помощью алгоритмических средств, например, преобразования Гильберта. Ниже основное внимание уделим именно этим вопросам.

III. Роль квадратурной составляющей в процедурах цифровой обработки сигналов

С этой целью рассмотрим структурную схему приемника с двухэлементной решеткой и весовой обработкой информации [8], которая представлена на рис. 2. В данном случае будем полагать, что главный лепесток диаграммы направленности двухэлементной решетки ориентирован в направлении прихода полезного сигнала, а источник помех имеет угловое (пространственное) различие. Поэтому обработку в этом случае иногда называют пространственной.

Роль межэлементного накопления тем выше, чем меньше различаются между собой амплитуды полезных сигналов, принимаемых отдельными элементами (каналами) решетки. Обратим внимание, что важным является не только идентичность характеристик приемных элементов A_1 и A_2, но и фазовращателей, которые образуют квадратурную составляющую (на рис. 2 обозначены – $\pi/2$).

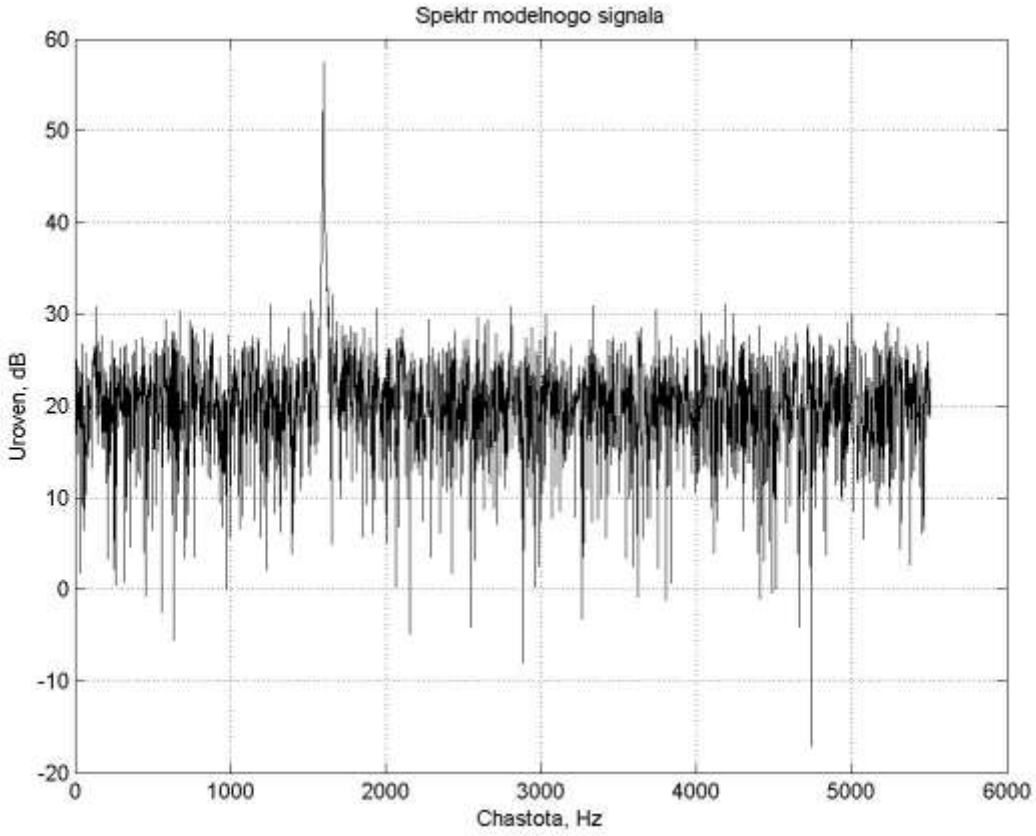

Рис. 1. Составляющие спектра модельного сигналов

В [8] показано, что при заданных условиях величина первых трех весовых коэффициентов (p_i) равна 0,5, а четвертый коэффициент равен – 0,5.

Проанализируем влияние точности формирования квадратурной составляющей, полагая, что приемные элементы имеют идентичные характеристики. Условия модельного эксперимента следующие: угол между осью диаграммы направленности и направлением на источник помех – 30^o; несущая частота полезного сигнала – 2 КГц, а помехи – 5 КГц; амплитуда помехи в 3 раза превышает амплитуду полезного сигнала; частота дискретизации – 22 КГц. В каждом такте дискретизации полезный и помеховый сигнал подвержены «модуляции числом» из равномерного датчика (величина $A(t)$ в соотношении (11)). Разница в частоте полезного сигнала и помехи особой роли для селекции не играет.

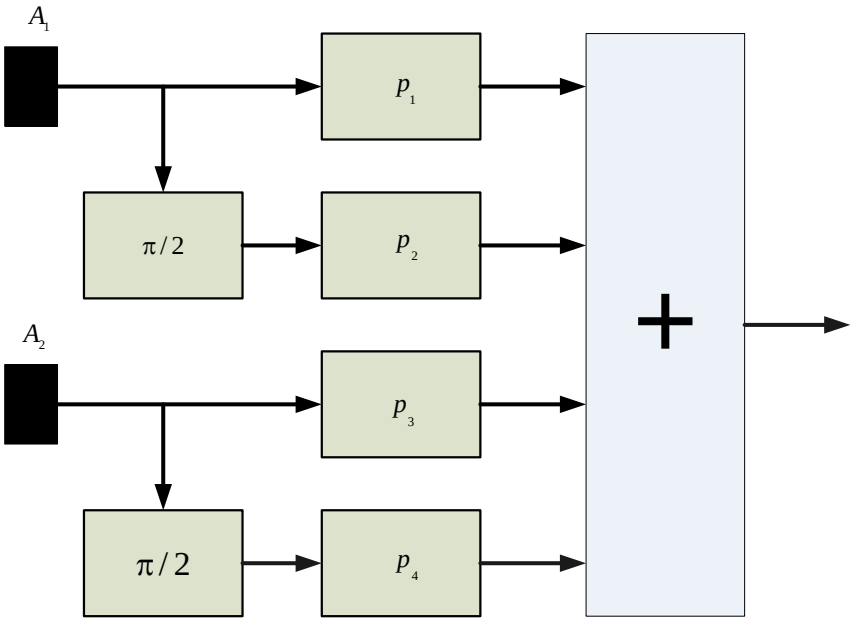

Рис. 2. Структурная схема приемника с двухэлементной решеткой

Спектр суммарного сигнала на одном из каналов представлен на рис. 3.

В процессе модельного эксперимента использовались две квадратурные составляющие – одна эталонная, полученная в процессе формирования аналитического сигнала; вторая – полученная в результате расчетов с помощью преобразования Гильберта, которое будет рассмотрено ниже.

На рис. 4 представлены результаты пространственной обработки суммы сигналов, спектр которых представлен на рис. 3. При этом в качестве квадратурных составляющих использовались мнимые составляющие моделированного аналитического сигнала (идеальный вариант восстановления квадратурной составляющей).

При этом более темной линией на рис. 4 показаны результаты выделения полезного сигнала с помощью пространственной схемы обработки, эталонный сигнал (модельная вещественная часть аналитического сигнала) показан более светлой линией. Представленные результаты свидетельствуют о качественном выделении полезного сигнала на фоне мощной помехи. Эти результаты можно рассматривать как потенциальные характеристики анализируемой схемы обработки.

На рис. 5 представлены результаты пространственной обработки той же смеси полезного сигнала и помехи только для случая, когда квадратурная составляющая в каждом из каналов была сформирована с помощью преобразования Гильберта.

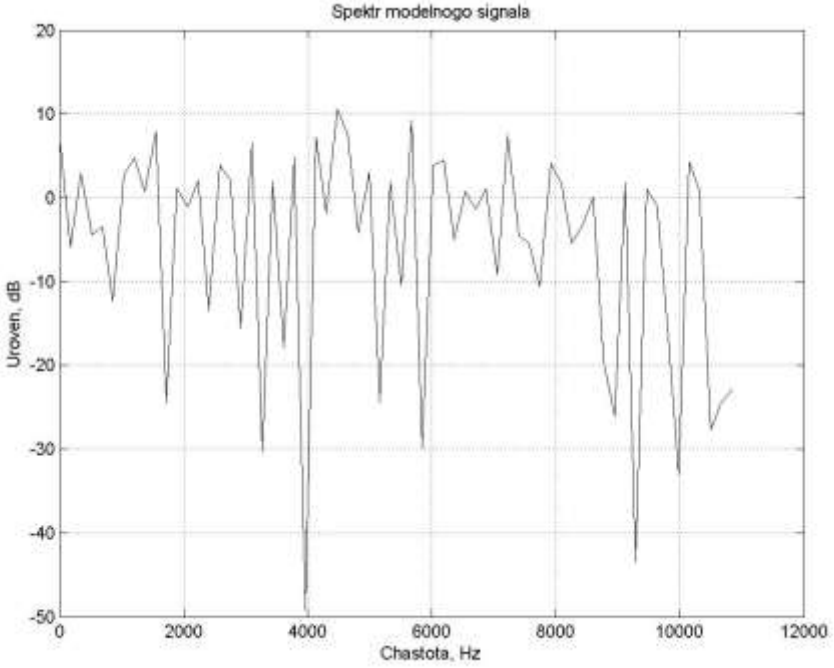

Рис. 3. Спектр суммарного сигнала на выходе элемента регистрации

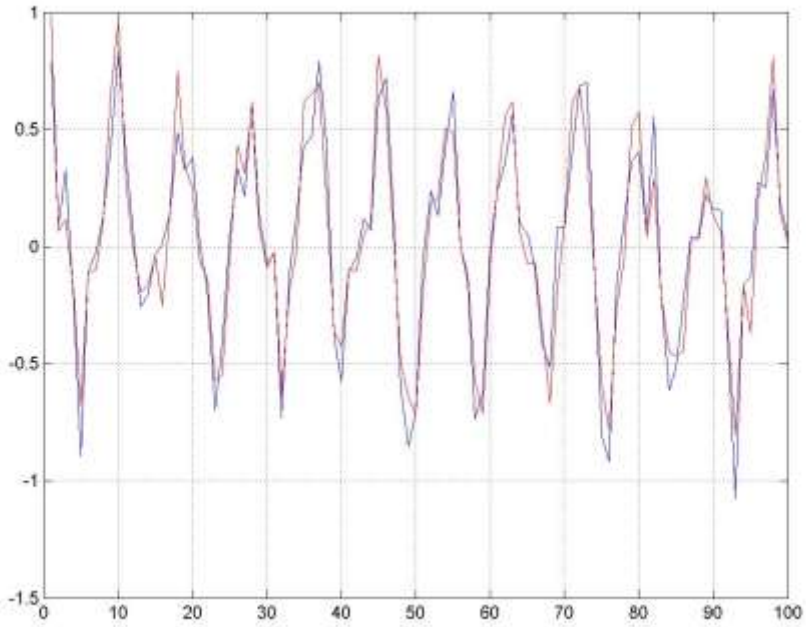

Рис. 4. Результаты выделения полезного сигнала с помощью процедур пространственной обработки (более темная линия), эталонный сигнал – более светлая линия

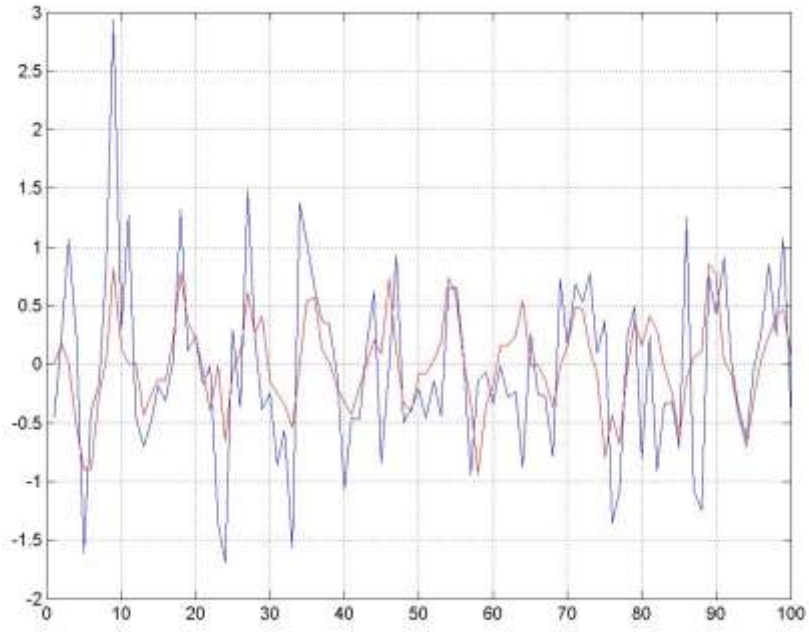

Рис. 5. Результаты выделения полезного сигнала с помощью процедур пространственной обработки (более темная линия), эталонный сигнал – более светлая линия. Квадратурная составляющая сформирована с помощью преобразования Гильберта

Анализ рисунков 4 и 5 свидетельствует о том, что качество выделения полезного сигнала во многом определяется точностью восстановления квадратурной составляющей в каждом из каналов. Поэтому ниже основное внимание уделим анализу процедур формирования квадратурной составляющей по результатам регистрации вещественной части аналитического сигнала.

IV. Исследование процедур восстановления квадратурной составляющей аналитического сигнала

Как известно [3-5], квадратурная составляющая получается из вещественного сигнала с помощью преобразования Гильберта. Вычисляется преобразование Гильберта следующим образом:

$$x_i(t) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_b(\tau)}{t-\tau} d\tau ,$$

где τ – переменная интегрирования, а PV – указывает главное значение сингулярного интеграла. Данный интеграл представляет собой свертку сигнала $x_b(t)$ и функции $1/(\pi t)$. Известно, что система, осуществляющая преобразование Гильберта, является физически нереализуемой, поскольку ее импульсная характеристика имеет бесконечную протяженность в обоих направлениях временной оси. На практике при обработке цифровых данных для получения квадратурной составляющей используют преобразование Фурье и фильтровые схемы.

В качестве анализируемых процедур будем рассматривать следующие:

1) специализированную функцию среды MATLAB – hilbert.

2) соотношения для обработки дискретных значений регистрируемых сигналов, представленные в [6, с. 473],

$$x(n\Delta t) = 2\Delta f\,\mathbf{Re}\left[\sum_{k=1}^{N/2} X(k\Delta f)\,\mathbf{exp}\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] + X_o\Delta f \;-\; \text{вещественная часть;} \qquad (12)$$

$$\tilde{x}(n\Delta t) = 2\Delta f\,\mathbf{Im}\left[\sum_{k=1}^{N/2} X(k\Delta f)\,\mathbf{exp}\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] - \text{мнимая часть.} \qquad (13)$$

Здесь множители $\Delta t = 1/f_d$, $\Delta f = 1/(N\Delta t)$, а величина X равна

$$X(k\Delta f) = \Delta t\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\,\mathbf{exp}\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right). \qquad (14)$$

Как и предыдущая функция, данные соотношения базируются на использовании преобразования Фурье;

3) соотношение для расчета импульсной характеристики фильтра, осуществляющего преобразование Гильберта [9, с. 370]

$$h(n) = 2\,\mathbf{sin}^2(\pi n/2)/(\pi n), \qquad (15)$$

которое справедливо для единичной частоты дискретизации регистрируемого сигнала. Дискретная импульсная характеристика преобразования Гильберта при частоте дискретизации, равной единице, представлена на рис. 6. Здесь следует отметить, что в ряде случаев для повышения эффективности преобразования Гильберта пытаются использовать большее количество коэффициентов. Это не совсем продуктивное решение, поскольку, эффективность преобразования слабо зависит от количества коэффициентов, если речь идет об обработке нелинейных нестационарных сигналов.

Результаты модельного эксперимента свидетельствуют, что все три указанные выше процедуры имеют одинаковую эффективность при восстановлении квадратурной составляющей для модельного сигнала (11).

В качестве контрольного сигнала будем использовать синусоидальное колебание (11) с частотой несущего колебания 1600 Гц и частотой дискретизации 32000 Гц. При этом вещественная часть сигнала будет выступать в качестве исходных данных для восстановления (расчета) квадратурной составляющей.

Результаты восстановления мнимой части сигнала с использованием функции среды MATLAB – hilbert представлены на рис. 7. При этом более темной линией показаны результаты восстановления мнимой части с помощью функции среды MATLAB – hilbert, мнимая часть контрольного сигнала показана более светлой линией. Их анализ свидетельствует, что рассматриваемая функция устойчиво восстанавливает фрагменты сигнала, на которых нет существенных фазовых изменений. При наличии фазовых изменений, обусловленных вариациями начальной фазы или частоты несущего колебания, мнимая часть восстановленного сигнала отличается от мнимой части контрольного сигнала.

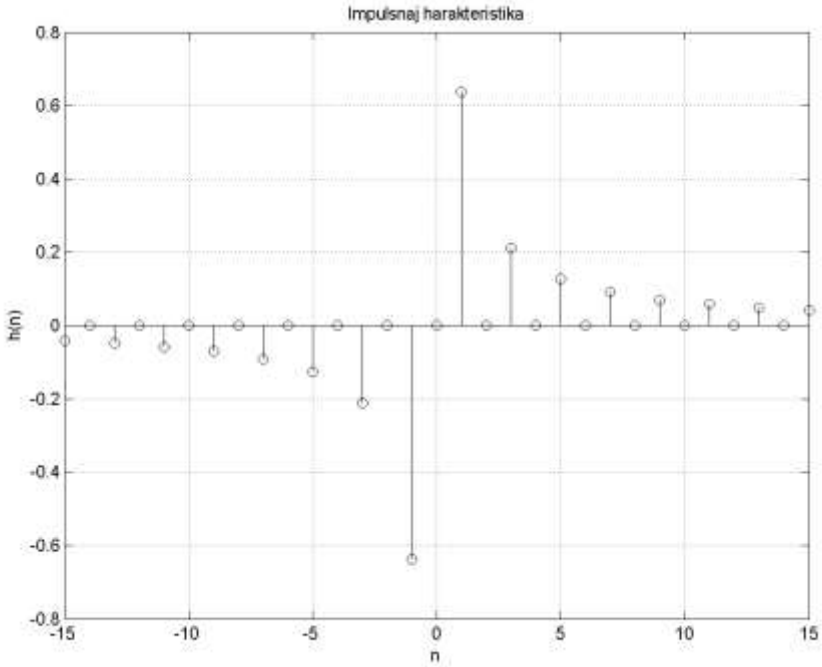

Рис. 6. Импульсная характеристика преобразования Гильберта

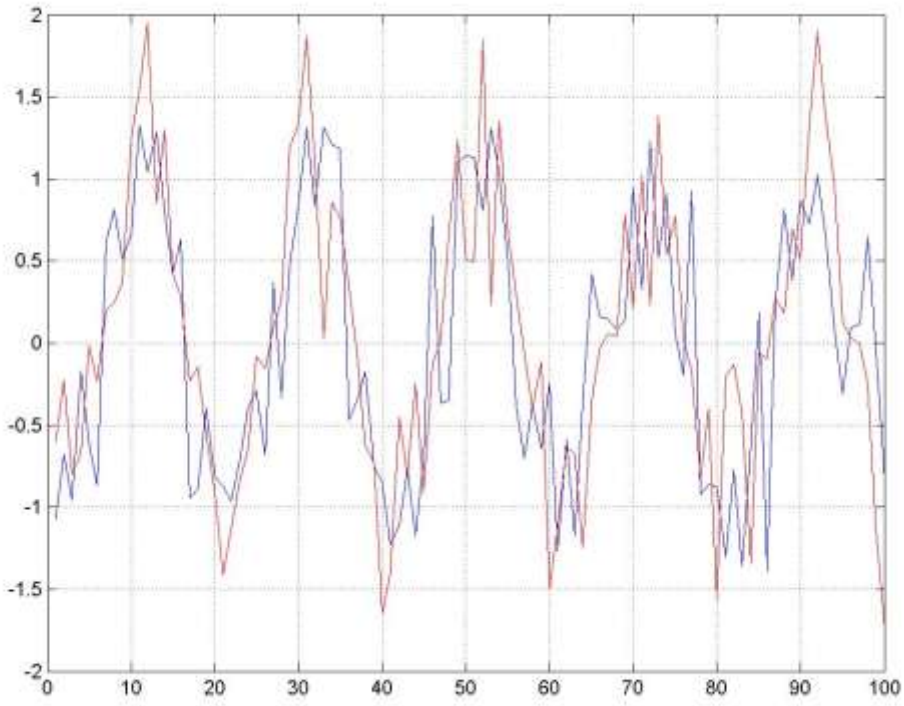

Рис. 7. Результаты восстановления квадратурной части контрольного сигнала (более темная линия) с помощью преобразования Гильберта

Этот же сигнал восстанавливался с помощью процедур, предложенных автором. В основу процедур положены численные методы: нормализация обрабатываемой вы-

борки, тригонометрические преобразования, обработка с помощью метода наименьших квадратов, отбраковка аномальных измерений, учет априорных данных и т.д.

В качестве числовой характеристики оценки качества использовалась сумма квадратов невязок восстановленной квадратурной составляющей и ее истинных (эталонных) значений. Для преобразования Гильберта указанная сумма квадратов невязок равна 38. У численных процедур, приведенных на рис. 8, сумма квадратов невязок равна 6, что существенно лучше. Краевые эффекты у численной процедуры не превышают одного периода анализируемого сигнала. При исключении краевого эффекта в начале анализируемого сигнала – выигрыш численных процедур будет еще больше.

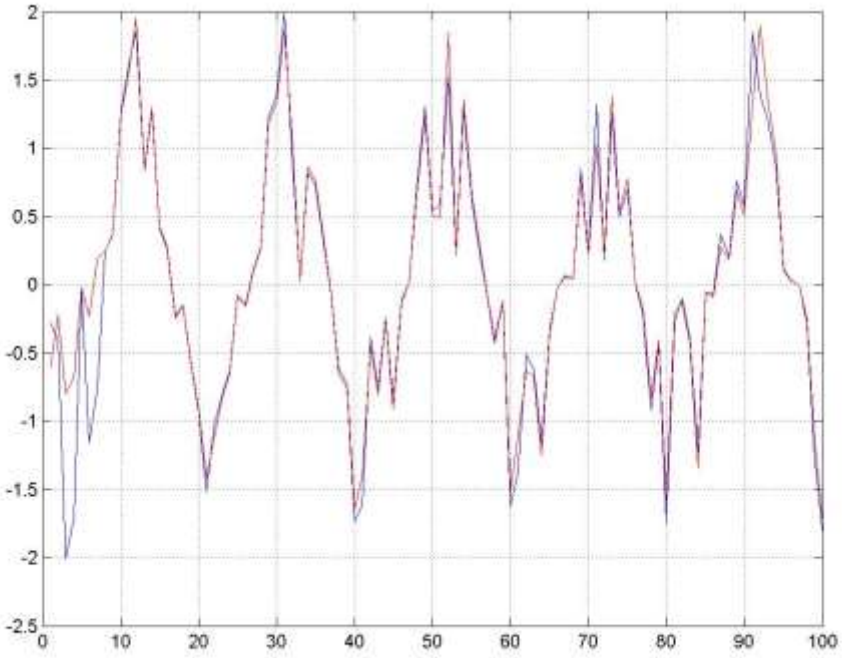

Рис. 8. Результаты восстановления квадратурной части контрольного сигнала (более темная линия) с помощью численных методов

Выводы

Таким образом, на основе положений кумулянтного анализа (в частности, кумулянтных уравнений, аппарата моментных и кумулянтных скобок) получены явные соотношения, устанавливающие связь между высшими моментными и корреляционными функциями совокупностей случайных процессов.

Исследуемые Гильбертовы процедуры имеют одинаковое качество восстановления квадратурной составляющей. Эти процедуры устойчиво и качественно решают рассматриваемую задачу применительно к классу гармонических сигналов (отсутствие нелинейных искажений и нестационарности).

Наличие нелинейных искажений в приемных устройствах или нестационарность относительно хотя бы одного из параметров аналитического сигнала приводят к снижению качества восстановления квадратурной составляющей анализируемого сигнала. Последнее существенно снижает качество пространственно-временной об-

работки сигналов. Достоинствами процедур на базе преобразования Фурье – меньшие краевые эффекты и отсутствие задержки в получении текущего результата. Недостатком является более сложная схема обработки и значительные вычислительные затраты. Фильтровую схему преобразования Гильберта характеризуют простота обработки и незначительные вычислительные затраты. Недостатками является значительные краевые эффекты и наличие задержки получения текущего результата, которые зависят от числа используемых коэффициентов в фильтре.

Разработанные численные процедуры восстановления квадратурной составляющей для рассматриваемого класса сигналов обладают более высокой точностью. Краевой эффект у численных процедур ограничивается одним периодом сигнала в начале обрабатываемого временного ряда.

Повысить качество восстановления можно за счет:

- значительного повышения (на порядок и более) частоты дискретизации анализируемых сигналов;

- использования преобразования Гильберта – Хуанга;

- дальнейшее усовершенствование процедур формирования квадратурной составляющей для других моделей анализируемых сигналов.

Рассматриваемые вопросы выходят за рамки данной статьи и будут исследованы в дальнейшем.

Список литературы:

1. *Bedrosian E.* A Product theorem for Hilbert Transform // Proceedings of the IEEE – 1963. – No.51. – P. 868-869.

2. *Nuttall A. H.* On the quadrature approximation to the Hilbert Transform of modulated signal // Proceedings of the IEEE. – 1966. – No.54. – P. 1458-1459.

3. *Norden E. Huang, Samuel S.P. Shen.* The Hilbert-Huang transform and its applications. – Singapore: World Scientific Publishing Company: – 2005.– 324 p.

4. *Huang N. E., Shen Z., Long S. R., Wu M. C., Shih H. H., Zheng Q., Yen N. C., Tung C. C., Liu H. H.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1998. – No.454. – P. 903-995.

5. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. – М.: Наука. Главн. ред. физ. мат. литературы. 1983. – 288 с.

6. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

7. *Харитонов В. Б., Зирова Ю. К.* Цифровой широкополосный преобразователь Гильберта звуковых сигналов // Электронный журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. – 2008. – № 9. – Режим доступа к статье http://www.jurnal.org/articles/2008/izmer10.html.

8. Адаптивная компенсация помех в каналах связи. *Под ред. Ю.И. Лосева.* – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.

9. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.