УДК 621.372

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ДОСТАВКИ ПАКЕТОВ ЗА ЗАДАННОЕ ВРЕМЯ

Ю.И. Лосев,
К.М. Руккас
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

У статті розглядається ймовірнісно-часовий граф, який описує поведінку телекомунікаційної мережі з обмеженим числом перезапитів. Запропонована модель дозволяє оцінити імовірність своєчасної доставки інформації в мережі з обмеженим числом перезапитів.

The article deals with the probabilistic-time graph, which describes the behavior of data transmission with a limited number of referral system. The proposed model allows us to estimate the probability of timely delivery of information data transmission system with a limited number of referral system.

В статье рассматривается вероятностно-временной граф, описывающий поведение телекоммуникационной сети с ограниченным числом переспросов. Предложенная модель позволяет оценить вероятность своевременной доставки пакетов в телекоммуникационной сети с ограниченным числом переспросов.

Введение

Важной характеристикой телекоммуникационной сети (ТКС) является вероятность доставки пакета за заданное время. В работе [1] была предложена математическая модель канала, которая дает возможность определить среднее значение и дисперсию времени доставки, а также вероятность ошибки. В предложенной модели предполагалось, что число повторений при обнаружении ошибки и потери пакета не ограничено. При введении ограничения на время доставки ограничивается число возможных повторов, а, следовательно, меняется и модель процесса.

В известных источниках анализ количественных характеристик процесса информационного обмена в ТКС основывается на использовании математических аппаратов теории массового обслуживания (ТМО) [2–4], теории графов [5], вероятностно-временных графов (ВВГ) [6–8] и теории телетрафика со свойством самоподобия [9]. Однако применение рассматриваемых математических аппаратов позволяет анализировать частные характеристики процесса доставки пакетов, задачи маршрутизации потоков, оценить вероятностно-временные характеристики протоколов информационного взаимодействия, характеристики сетевого трафика.

Проанализировав возможности и ограничения различных подходов к анализу количественных характеристик процесса информационного обмена в ТКС, возникла необходимость в разработке методики, которая учитывает специфику протоколов информационного обмена, а также позволяет определить среднее время доставки пакетов с учетом процессов передачи и задержки в очереди на обслуживание информационного потока устройством обработки.

В работе [1] разработана методика анализа вероятностно-временных характеристик ТКС с неограниченным числом переспросов. В работе [10] данная методика усовершенствована с учетом ограниченного числа переспросов. Однако, предложенный в [10] метод, трудно реализовать на практике, поскольку вероятностно-временной граф (ВВГ) системы увеличивает свою сложность с ростом числа переспросов. Поэтому появилась необходимость усовершенствовать методику, предложенную в [10]. Таким образом, целью статьи является усовершенствование математической модели процесса информационного обмена между пользователями и разработка методики оценки требуемых вероятностно-временных характеристик для произвольного потока поступающих пакетов.

I. Методика определения вероятности доставки пакетов за заданное время

Обозначим число повторных передач через M. Тогда ВВГ, описывающий процесс информационного обмена в телекоммуникационной сети, будет иметь вид, представленный на рис. 1. На этом рисунке обозначены:

- $P_{пр}$ – вероятность безошибочной доставки пакета;
- $P_{но}$ – вероятность доставки пакета с необнаруженной ошибкой;
- $P_{оо}$ – вероятность обнаружения ошибки в переданном пакете;
- $P_{пот}$ – вероятность потери пакета;
- $P_{кв}$ – вероятность успешной доставки квитанции отправителю;
- $T_{п}$ – время доставки пакета;
- $T_{а}$ – время ожидания квитанции;
- $T_{кв}$ – время доставки квитанции отправителю;
- вершина «Н» соответствует началу работы протокола ТКС;
- вершина «Пот» соответствует случаю, когда в ТКС произошла потеря пакета или в принятом пакете обнаружены ошибки;
- вершина «Но» соответствует случаю, когда пакет передан с необнаруженными ошибками;
- вершины 1,2,…M соответствуют случаю, когда для передачи пакета без ошибок не потребовалось повторных передач, потребовалось одна повторная передача и т.п.;
- вершины 1′,2′,…M' соответствуют случаю, когда для передачи пакета с необнаруженными ошибками не потребовалось повторных передач, потребовалось одна повторная передача и т.п.;
- вершина «М» соответствует случаю, когда после M повторных передач пакет не был доставлен адресату;
- вершина «Пр» соответствует случаю, когда пакет был доставлен адресату без ошибок;
- вершина «Ош» соответствует случаю, когда пакет был доставлен адресату с необнаруженными ошибками.

Для получения аналитических зависимостей необходимо провести эквивалентные преобразования ВВГ, представленного на рис. 1.

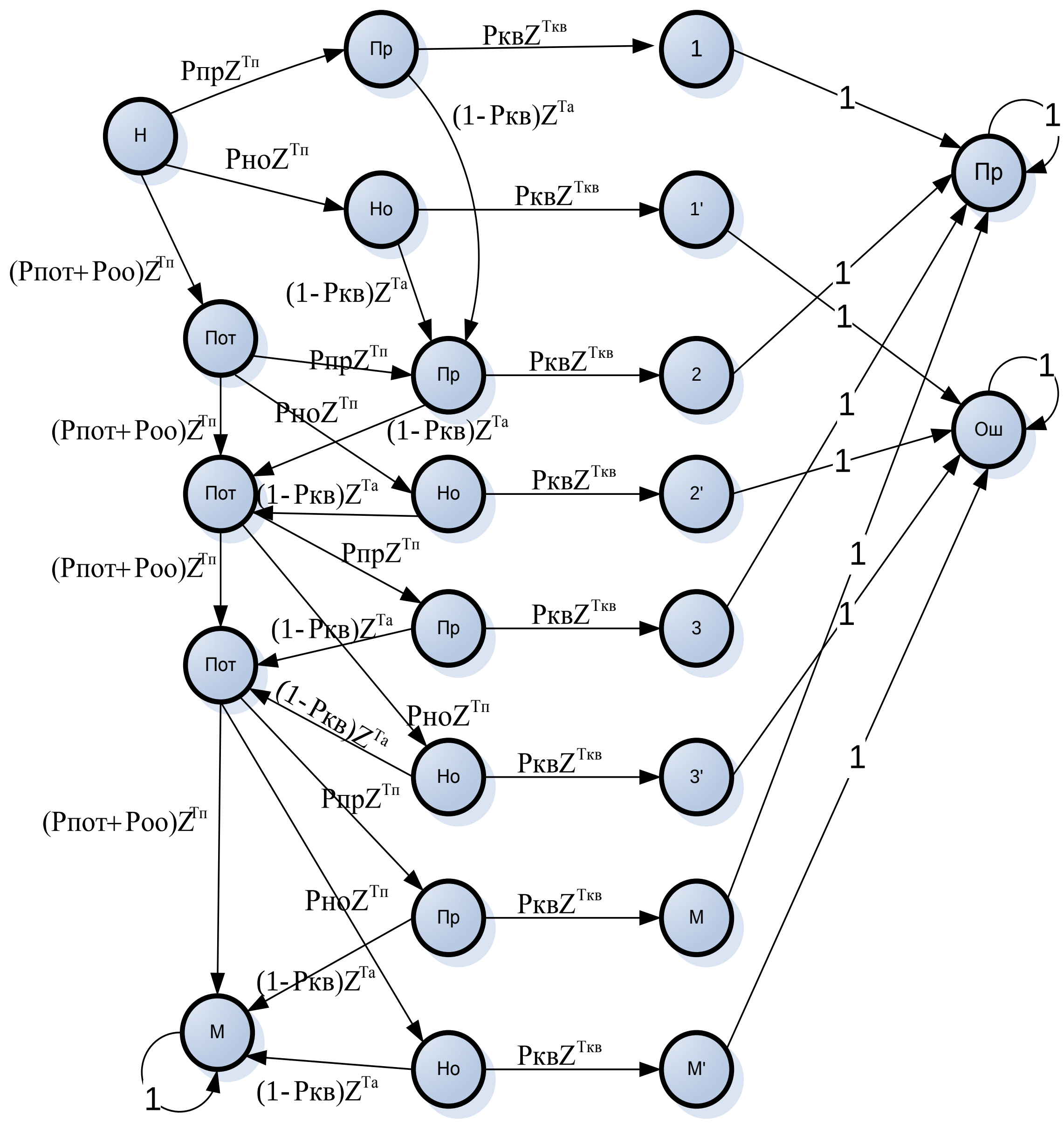

Рис. 1. Вероятностно-временной граф доставки пакетов через сеть с ограниченным числом переспросов

Путем эквивалентных преобразований этот ВВГ приводится к виду, изображенному на рис. 2, на котором обозначено

$$f_1(z) = P_{пр} \cdot P_{кв} \cdot z^{T_п + T_{кв}};$$

$$f_2(z) = P_{но} \cdot P_{кв} \cdot z^{T_п + T_{кв}};$$

$$f_3(z) = (P_{пр} + P_{но}) \cdot (1 - P_{кв}) \cdot z^{T_п + T_а} + (P_{пот} + P_{оо}) \cdot z^{T_п + T_а} = (1 - P_{кв} \cdot (P_{пр} + P_{но})) \cdot z^{T_п + T_а}.$$

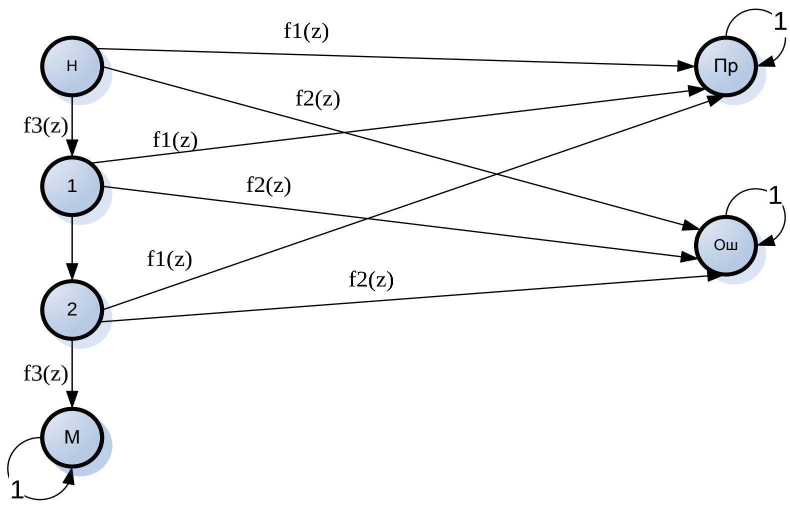

Рис. 2. Промежуточные преобразования графа доставки пакета через сеть с ограниченным числом переспросов

Промежуточный граф, представленный на рис. 2, после дальнейших эквивалентных преобразований будет приведен к виду, представленному на рис.3.

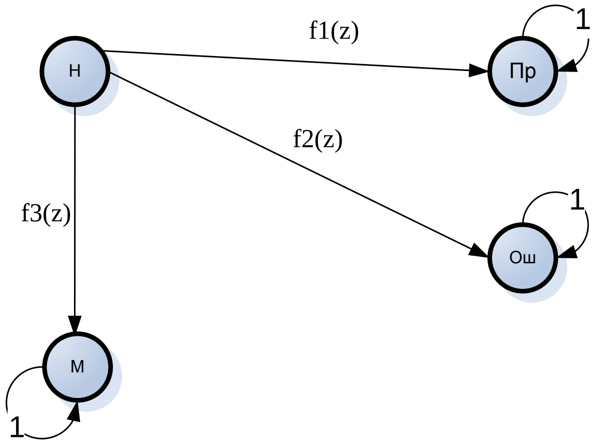

Рис. 3. Окончательный вид преобразованного ВВГ

Производящая функция графа (рис. 3) имеет вид

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)\,, \tag{1}$$

где

$$F_1(z) = f_1(z) \cdot \frac{1-(f_3(z))^{M+1}}{1-f_3(z)}\,;$$

$$F_2(z) = f_2(z) \cdot \frac{1-(f_3(z))^{M+1}}{1-f_3(z)}\,;$$

$$F_3(z) = (f_3(z))^{M+1}\,.$$

Тогда относительное среднее время передачи пакета равно

$$\frac{T_{cp}}{T_n} = \left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z=1}, \tag{2}$$

а вероятность доставки пакета равна

$$P_{дост} = F_1(z)\Big|_{z=1} + F_2(z)\Big|_{z=1}. \tag{3}$$

В соответствии с (1) и (2) при ограниченном значении времени доставки пакета ($T_{ср\ дост}$) определяется допустимая величина числа повторов M. По выражению (3) и полученному значению M вычисляется вероятность доставки пакета за заданное время. Стоит отметить, что с увеличением числа повторных передач M (рис. 1), ВВГ передачи пакета с ограниченным числом переспросов усложняется, а значит, усложняется определение характеристик такого графа. Поэтому необходимо разработать методику, которая бы упростила вычисление характеристик ВВГ, представленного на рис. 1. Для этого пронумеруем вершины графа, изображенного на рис. 2: 1 – начальная вершина; 2 – правильный прием; 3 – ошибка; 4 – потеря пакета.

При пошаговом эквивалентном преобразовании графа, изображенного на рис. 2, происходит исключение некоторых промежуточных вершин. Так, при первом шаге такого преобразования получим граф, приведенный на рис. 4.

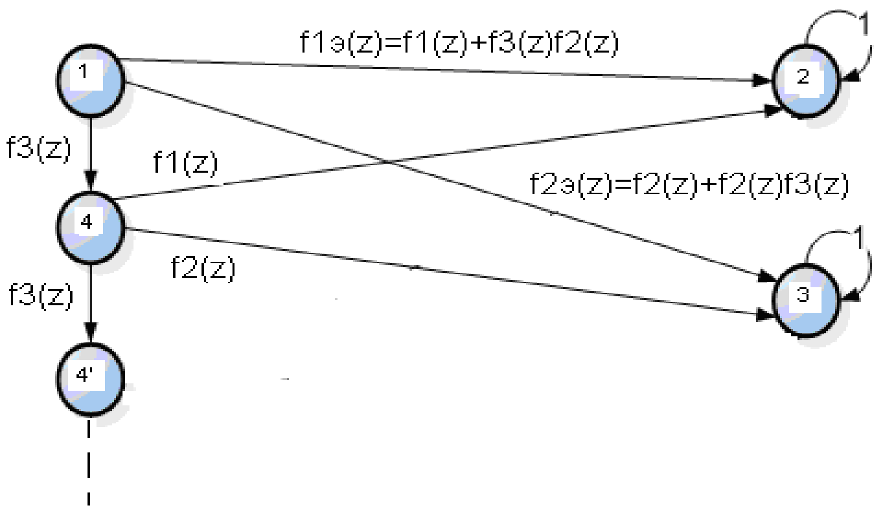

Рис. 4. Преобразованный ВВГ доставки пакета через сеть с ограниченным числом переспросов.

Осуществляя дальнейшие преобразования, получим граф, представленный на рис. 5.

Как видно из приведенного на рис. 4 графа, поведение ТКС на каждом следующем шаге зависит от состояния только на предыдущем, т.е. описываемый процесс обладает марковским свойством и является цепью Маркова. Как известно, полным описанием такой системы является задание матрицы переходов. Отличительной особенностью матрицы переходов в данном случае является то, что ее элементами являются не вероятности переходов, а функции соединяющих дуг.

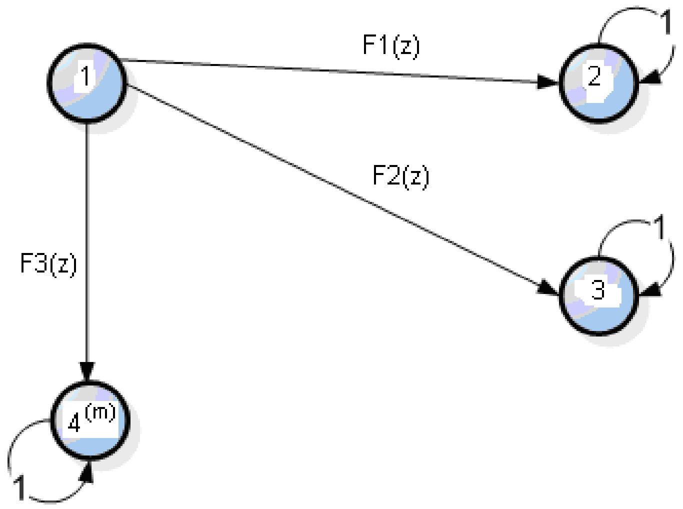

Рис. 5. Промежуточный ВВГ

В общем случае эта матрица записывается в следующем виде

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11}(z) & f_{12}(z) & \dots & f_{1n}(z) \\ f_{21}(z) & f_{22}(z) & \dots & f_{2n}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(z) & f_{2n}(z) & \dots & f_{nn}(z) \end{Vmatrix}$$

при условии $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(z)\Big|_{z=1} = 1$.

Задача заключается в том, что зная матрицу переходов, необходимо найти функции дуг перехода системы из начального состояния в поглощающие состояния за M шагов (число шагов определяется числом повторных передач M). С этой целью представим граф, изображенный на рис. 2, эквивалентным, приведенным на рис. 6.

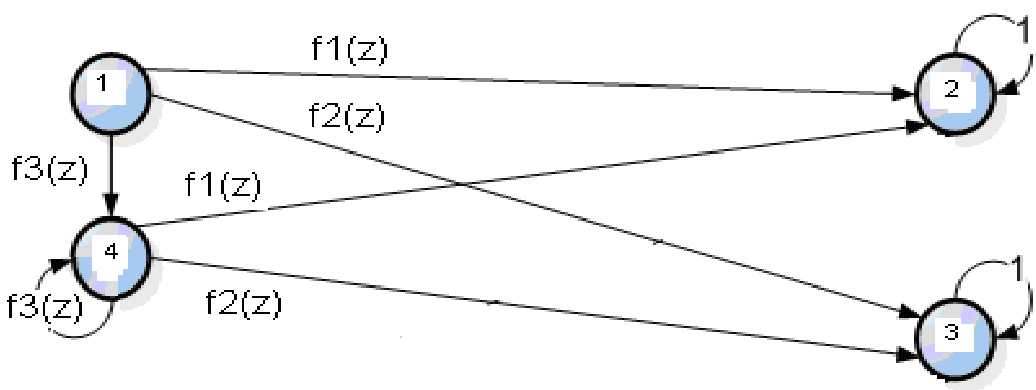

Рис. 6. Преобразованный граф доставки пакета через сеть с ограниченным числом переспросов

Матрица переходов этого графа (рис. 6) имеет вид

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \end{Vmatrix}.$$

Отобразим начальное состояние системы вектором $P_0 = \|1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\|$. Умножим этот вектор на матрицу переходов. Получим

$$P_1 = \|1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\| \cdot \begin{Vmatrix} 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \end{Vmatrix} = \|0 \quad f_1(z) \quad f_2(z) \quad f_3(z)\|.$$

При умножении вектора P_1 на матрицу F получим

$$P_2 = \|0 \quad f_1(z) + f_1(z) f_3(z) \quad f_2(z) + f_2(z) f_3(z) \quad f_3^2(z)\| \text{ или } P_2 = P_0 \cdot F^2.$$

Как видно из рис. 4, этот вектор описывает состояние ТКС после первого шага эквивалентного преобразования графа. Таким образом, после каждого шага эквивалентного преобразования графа получаем, что результат расчета предыдущего состояния сети умножается на матрицу переходов. Рассуждая далее, можно показать, что после M повторов или после $M+1$-ого шага получим

$$P(M+1) = P(M) \cdot F =$$

$$= \|0 \quad f_1(z)(1 + f_3(z) + \ldots + (f_3(z))^{M-1}) \quad f_2(z)(1 + f_3(z) + \ldots + (f_3(z))^{M-1}) \quad (f_3(z))^M\| \cdot \begin{Vmatrix} 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_1(z) & f_2(z) & f_3(z) \end{Vmatrix} =$$

$$= \|0; \quad f_1(z)(1 + f_3(z) + \ldots + (f_3(z))^M) \quad f_2(z)(1 + f_3(z) + \ldots + (f_3(z))^M) \quad (f_3(z))^{M+1}\|.$$

Используя тождество $1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + \ldots a^i + \ldots + a^{n-1})$, преобразуем вектор $P(M+1)$ к следующему виду

$$P(M+1) = P(M) \cdot F = P(1) \cdot F^M =$$

$$= \left\| 0 \quad f1(z) \cdot \frac{1 - (f3(z))^{M+1}}{1 - (f3(z))} \quad f2(z) \cdot \frac{1 - (f3(z))^{M+1}}{1 - (f3(z))} \quad (f_3(z))^{M+1} \right\|. \qquad (4)$$

Используя данную методику, можно существенно упростить решение задачи нахождения вероятности доставки пакетов за заданное время. Упрощение достигается за счет использования математического аппарата дискретных марковских цепей.

Выводы

Усовершенствована математическая модель процесса информационного обмена между пользователями и разработана методика, которая позволяет определить вероятностно-временные характеристики канала с учетом ограниченного времени доставки. В отличие от ранее предложенной методики [6], в данном случае была обоснована возможность использования аппарата дискретных марковских цепей, что позволило значительно упростить определение вероятностно-временных характеристик телекоммуникационной сети с ограниченным числом переспросов.

Список литературы:

1. *Лосев Ю.И., Закиров З.З.* Методика определения вероятностно-временных характеристик информационных технологий с учетом специфики протоколов // Системи обробки інформації: зб наук. пр. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 1 (68). – С. 87–93.
2. *Шварц М.* Сети связи: протоколы, моделирование и анализ: Пер. с англ. – Ч. 1. – М.: Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1992. – 336 с.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания: Пер. с англ. И.И. Грушко / Под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. *Лосев Ю.И., Руккас К.М.* Сравнительный анализ математического аппарата моделирования телекоммуникационных сетей // Системи обробки інформації: зб наук. пр. – Х.: ХУПС, 2007. – Вип. 8 (66). – С. 55–60.
5. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
6. Дэвис Д., Барбер Д., Прайс У. Вычислительные сети и сетевые протоколы. – М.: Мир, 1982. – 562 с.
7. Адаптивная компенсация помех в каналах связи / Ю.И. Лосев, А.Г. Бердников, Э.Ш. Гойхман, Б.Д. Сизов / Под. ред. Ю.И. Лосева. – М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
8. *Захаров А.И.* Основы передачи данных. – Л.: ВАС, 1985. – 157 с.
9. *Крылов В.В., Самохвалова С.С.* Теория телетрафика и ее приложения. – С.-Пб.: БХВ Петербург, 2005. – 288 с.
10. *Лосев Ю. И., Руккас К. М.* Методика оценки вероятностно-временных характеристик систем передачи данных с ограниченным числом переспросов // Системи управління, навігації та зв’язку: наукове періодичне видання Центрального інституту навігації і управління. – К., 2010. – Вип. 3 (15). – С. 226–228.