

УДК 621.391

# ОСОБЕННОСТИ ТЕНЗОРНОГО НЕОРТОГОНАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННЫХ МЕТРИК

## Часть 2. Тензорное моделирование ТКС с использованием базисов узловых пар и разрезов



[О.Ю. ЕВСЕЕВА](#)

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

**Abstract** – A non-orthogonal modeling of telecommunication network is a separate area within the tensor approach. Although the scope of the non-orthogonal modeling is limited to the case of constant metrics, in this case the solution of applied problems can be obtained in an analytical form and the dimension of the problem can be reduced. According to the possible non-orthogonal bases, there are four types of non-orthogonal networks. Two of them - the circuit and the nodal networks - have been proposed by G. Kron, and therefore are the most widespread. This article is focused on the features of the modeling techniques by nodal network. A detailed analysis has allowed to develop the G. Kron's methodology and to propose a new type of non-orthogonal modeling technique - modeling by a network of cuts. The network of cuts is a generalization of the well-known nodal networks. Shown in the article numerical results indicate validity of the proposed technique. The nodal network and the proposed network of cuts allow to solve the multipath routing problem, which provides the lowest end-to-end delay, if intensity of incoming traffic is known.

**Анотація** – У рамках тензорного підходу як окремий напрямок слід виділити моделювання телекомунікаційних мереж з використанням неортогональних базисів. У цьому випадку розв'язання прикладної задачі може бути отримано в аналітичному вигляді, а розмірність самої задачі значно знижена. У даній статті зосереджено увагу на особливостях методики моделювання з використанням базису вузлових пар. Детальний її аналіз дозволив запропонувати новий тип неортогонального моделювання з використанням базису розрізів. Наведені у статті кількісні результати вказують на коректність запропонованої методики.

**Анотация** – В рамках тензорного подхода как отдельное направление следует выделить моделирование телекоммуникационных сетей с использованием неортогональных базисов. В этом случае решение прикладной задачи может быть получено в аналитическом виде, а ее размерность значительно снижена. В данной статье внимание сосредоточено на анализе особенностей использования базиса узловых пар, что позволило предложить новый тип неортогонального моделирования с использованием базиса разрезов. Приведенные в статье численные результаты указывают на корректность предложенной методики.

## Введение

Математическое моделирование, будучи основным инструментом изучения сложных и территориально распределенных систем различной природы, является основным средством изучения и телекоммуникационных систем (ТКС). Причем на современном этапе развития теории телекоммуникационных систем существует

множество разнообразных математических моделей, нацеленных, как правило, на решение какой-либо одной задачи, например, графовые модели обеспечивают решение задач структурного синтеза, а модели в пространстве состояния зачастую связаны с решением задач управления. Тогда как первые оперируют исключительно структурными параметрами, вторые зачастую принимают во внимание лишь функциональные характеристики ТКС. Такой подход, основанный на разделении структурных и функциональных свойств, чреват потерей целостности и системности, а в конечном итоге – снижением адекватности математического описания. В этой связи вызывают интерес модели, позволяющие одновременно и комплексно использовать информацию об особенностях как структурного, так и функционального построения ТКС, как, например, тензорные модели [1, 2], на выходе которых имеем более эффективное решение прикладных проблем. Например, в рамках задач многопутевой маршрутизации тензорные модели обеспечили формализацию условий обеспечения качества обслуживания одновременно по нескольким разнородным показателям – скоростным, временным и показателям надежности [1, 2].

В рамках тензорного подхода можно выделить несколько направлений, отличающихся закладываемыми в них предпосылками и допущениями и, соответственно, сложностью получения численных результатов. Наибольшее упрощение может быть достигнуто за счет предположения постоянства метрического тензора и представления его координат известными постоянными числами [3]. В этом случае решение прикладной задачи может быть получено в аналитическом виде [4 – 6]. Более того, постоянный метрический тензор позволяет снизить размерность задачи путем использования неортогональных систем координат [7], что будет продемонстрировано в данной статье.

Возьмем за основу подход, описанный в работах [1, 2], где в качестве инварианта выступают тензорные уравнения

$$\Lambda = LT, \quad (1)$$

$$T = Y\Lambda, \quad (2)$$

где  $T$  – одновалентный ковариантный тензор средних задержек пакетов;  $\Lambda$  – одновалентный контравариантный тензор интенсивности потока пакетов;  $L$  – двухвалентный контравариантный тензор, выполняющий роль метрического тензора, т.е. определяющий свойства метрического пространства, связываемого с моделируемой ТКС, который с функциональной точки зрения определяет количественную зависимость между интенсивностью потока пакетов и их задержкой;  $Y$  – двухвалентный ковариантный метрический тензор. Как уже было отмечено выше, примем предположение о постоянстве метрических тензоров  $Y$  и  $L$ .

Независимо от типа метрического тензора в ходе моделирования тензорные уравнения (1) – (2) подлежат рассмотрению в той или иной системе координат (СК), выбор которой всецело зависит от постановки решаемой задачи. В общем случае размерность СК и соответственно размеры векторов проекций одновалентных тензоров  $T$  и  $\Lambda$  в этой системе координат равны  $n$ , где  $n$  – число трактов передачи в

моделируемой сети. Однако в неортогональном случае моделирующие ТКС тензоры рассматриваются в базисах более низкой размерности, например в базисе контуров  $B_\pi$  (в полной формулировке – базис подпространства контуров в рамках векторного пространства, определяемого структурой моделируемой сети), узловых пар  $B_\eta$ , разрезов  $B_\omega$  или путей  $B_r$  [7]. Особенности тензорного моделирования ТКС в условиях постоянного метрического тензора с использованием неортогональных базисов контуров  $B_\pi$  и путей  $B_r$  были подробно изложены в первой части данной статьи [8]. Здесь же будут рассмотрены особенности применения базисов узловых пар  $B_\eta$  и разрезов  $B_\omega$ . Оба эти базиса определяют одно и то же подпространство – подпространство разрезов векторного пространства структуры моделируемой сети.

## 1. Тензорные модели ТКС, с использованием базиса узловых пар

При представлении ТКС в виде узловой сети ( $\eta$ -сети) в соответствии с методологией Г. Крона предполагается, как и в случае контурных сетей, введение в структуру исходной сети дополнительной мнимой ветви между заданной парой полюсов [8 – 9]. Мнимые ветви вводятся в том случае, когда в структуре ТКС в анализируемом направлении связи отсутствует прямой тракт передачи и соответственно отсутствует моделирующая его ветвь между истоком и стоком. При этом размерность подпространства разрезов моделируемой сети не изменяется:

$$\phi^+ = m - 1 = \phi, \quad (3)$$

где  $m$  – число узлов ТКС,  $\phi^+$  – ранг сети с мнимой ветвью,  $\phi$  – ранг сети до введения мнимой ветви [7, 9].

Таким образом, в процессе неортогонального моделирования ТКС к рассмотрению принимаются две координатные системы различных типов и размерностей. Первая (примитивная) – система координат ветвей сети  $B_v$  размерности  $n^+ = n + 1$ , включающая  $n$  ветвей (трактов передачи) исходной сети и дополнительную мнимую ветвь; вторая – система координат узловых пар сети размерности  $\phi$ . Тогда в первой системе координат в качестве координатных путей выступают отдельные ветви сети  $v_i$ , и все процессы, протекающие в ТКС, рассматриваются относительно ее трактов передачи, а во второй системе координат координатные пути представлены узловыми парами  $\eta_i$ , и все функциональные переменные будут привязаны к узловым парам в структуре сети. На рис. 1 приведен пример телекоммуникационной сети и ее множество узловых пар  $\{\eta_i\}$ , откуда видно, что введение дополнительной мнимой ветви  $v_9$  не изменяет количество узловых пар  $\phi = \phi^+ = 5$ .

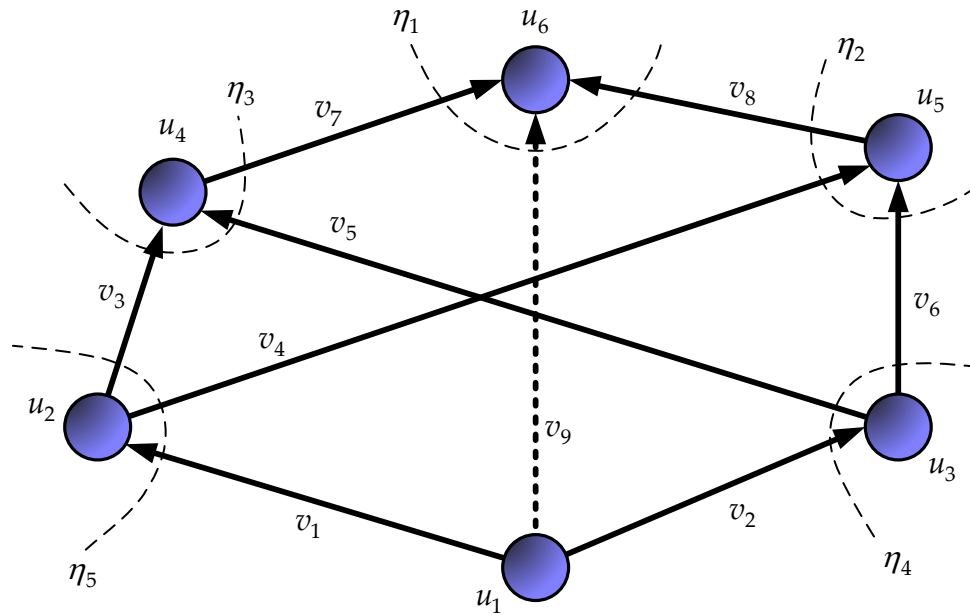


Рис. 1. Пример моделирования ТКС узловой сетью

Основу временной тензорной модели составляет инвариантное тензорное уравнение (1), которое в соответствии с постулатом второго обобщения Г. Крона [9] сохраняет свою форму неизменной независимо от базиса. Это уравнение в СК узловых пар (хотя сейчас речь идет о сети с добавочной мнимой ветвью, индекс «+», как при работе с контурной сетью [8], использовать не будем, поскольку для исходной сети и сети мнимой ветвью базис узловых пар один и тот же) имеет вид

$$\Lambda_\eta = L_\eta T_\eta, \quad (4)$$

где  $T_\eta$ ,  $\Lambda_\eta$  и  $L_\eta$  – проекции тензоров  $T$ ,  $\Lambda$  и  $L$  в базисе узловых пар, причем

$$\Lambda_\eta = \begin{pmatrix} \lambda_{(\eta)}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{(\eta)}^i \\ \vdots \\ \lambda_{(\eta)}^\phi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_\eta = \begin{pmatrix} \tau_1^{(\eta)} \\ \vdots \\ \tau_i^{(\eta)} \\ \vdots \\ \tau_\phi^{|\eta|} \end{pmatrix}$$

– векторы, соответственно интенсивности потока пакетов и задержек их передачи в узловых парах сети, а  $L_\eta$  – матрица проекции тензора  $L$  в СК узловых пар сети.

Тензорный характер величин  $T$ ,  $\Lambda$  и  $L$  по отношению к введенным СК определяет линейный характер преобразования их проекций при смене координатной системы рассмотрения [9]:

$$T_v^+ = (B_\eta^+)^t T_\eta, \quad (5)$$

$$\Lambda_\eta = B_\eta^+ \Lambda_v^+, \quad (6)$$

$$L_{\eta} = B_{\eta}^{+} L_{\nu}^{+} (B_{\eta}^{+})^t, \quad (7)$$

где  $B_{\eta}^{+}$  – матрица базисных узловых пар для сети с введенной мнимой ветвью,  $L_{\nu}^{+}$ ,  $\Lambda_{\nu}^{+}$  – проекции тензоров  $L$  и  $\Lambda$  в СК ветвей для этой же сети. Заметим, что  $L_{\nu}^{+}$  представляет собой диагональную матрицу, ненулевые элементы  $l_{(\nu)}^{ii}$  которой указывают на метрики отдельных трактов передачи.

На основании выражений (1), (4) – (7) может быть предложен тензорный метод решения следующей задачи многопутевой маршрутизации: для заданной пары полюсов определить порядок маршрутизации потока пакетов заданной интенсивности и порядок его распределения по трактам передачи, при котором достигается наименьшее значение межконцевой задержки. Т.е. в качестве *исходных данных* выступают:

1. Структура ТКС.
2. Диагональная матрица  $L_{\nu}$ .
3. Направление передачи с указанием истока и стока в сети.
4. Требуемая интенсивность потока пакетов, подлежащего передаче между заданной парой узлов,  $\lambda^{(mp\delta)}$ .

Тогда с учетом введенных обозначений, *искомым* является вектор  $\Lambda_{\nu}$ .

#### **Порядок расчета:**

Исходные данные для решения задачи (требуемая интенсивность потока  $\lambda^{(mp\delta)}$ ) задаются при помощи вектора размера  $n^{+}$   $\Lambda_{\nu}^{(mp\delta)}$ , одна из координат которого, а именно соответствующая введенной мнимой ветви, указывает на  $\lambda^{(mp\delta)}$ . Так же как и в случае рассмотрения  $\pi$ -сетей [8], координаты вектора  $\Lambda_{\nu}^{(mp\delta)}$  ассоциированы с ветвями сети, хотя фактически этот вектор задает лишь направление передачи потока: элементы, не отвечающие заданному направлению передачи пакета, равны нулю, а элементы, соответствующие ветвям в направлении исток-сток, указывают требования к интенсивности передачи. На первом этапе решения задачи  $\Lambda_{\nu}^{(mp\delta)}$  может быть интерпретирован как вектор  $\Lambda_{\nu}^{+}$  в выражении (6) и позволит рассчитать вектор интенсивностей потоков, проходящих через узловые пары сети,  $\Lambda_{\eta}$ .

В рамках категориального представления тензорной модели ТКС, представленной узловой сетью, имеет место коммутативная диаграмма (рис. 2), где  $Y_{\eta}$  – проекция двухвалентного ковариантного метрического тензора  $Y$  в СК узловых пар:

$$Y_{\eta} = [L_{\eta}]^{-1}.$$

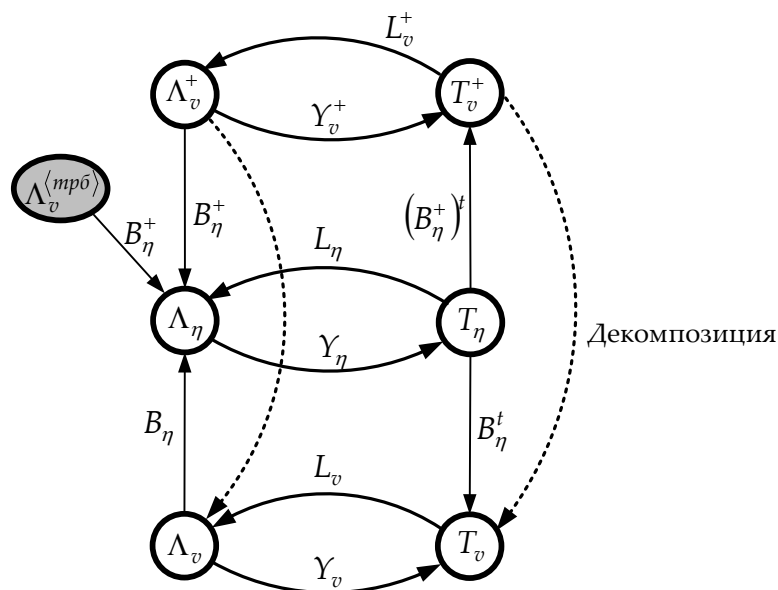


Рис. 2. Алгебраическая диаграмма тензорных моделей ТКС, полученных с использованием базиса узловых пар

В анализируемом направлении передачи потока в структуру исходной сети вводится мнимая ветвь, с учетом которой относительно узла-истока, выступающего в качестве опорного, определяется множество узловых пар сети и формируется базисная матрица  $B_\eta^+$ .

Затем, в соответствии с диаграммой (рис. 2), во-первых, производится расчет проекции тензора  $\Lambda$  в системе координат базисных узловых пар (6). Во-вторых, определяется проекция дважды контравариантного тензора  $L$  в системе координат узловых пар (7). В-третьих, рассчитывается проекция ковариантного тензора  $T$  в системе координат базисных узловых пар:

$$T_\eta = [L_\eta]^{-1} \Lambda_\eta. \quad (8)$$

В-четвертых, производится расчет проекций ковариантного тензора  $T$  в системе координат ветвей сети  $T_v^+$  по формуле (5). В-пятых, находится проекция тензора  $\Lambda$  в системе координат ветвей сети  $\Lambda_v^+$ , определяя окончательное решение поставленной задачи:

$$\Lambda_v^+ = L_v^+ T_v^+. \quad (9)$$

При этом  $\Lambda_v^+$  содержит в качестве подвектора вектор  $\Lambda_v$ , определяющий порядок распределения потока пакетов, а координаты вектора  $T_v^+$ , подвектором которого является  $T_v$ , определяют соответственно задержки пакетов в трактах передачи. При этом рассчитанное значение межконцевой задержки (элемент вектора  $T_\eta$ ) действительно оказывается минимально возможным при заданных исходных данных, а вектор (9) указывает на способ его достижения.

Особенности решения прикладных задач с помощью предложенного тензорного метода рассмотрим на примере одномерной сети (рис. 1). Сплошными линиями выделены реальные ветви сети, а пунктирной – мнимая ветвь, т.е. направление исток-сток ( $u_1 \Rightarrow u_6$ ), для которого необходимо обеспечить многопутевую передачу пакетного трафика интенсивности 100 тыс. 1/с. Таким образом, полюсами сети являются первый и шестой узлы. Отсутствие реальной ветви в анализируемом направлении передачи подразумевает введение дополнительной мнимой ветви с нулевой метрикой  $l_{(v)}^{ii} = 0$ .

Совокупность узловых пар в сети (рис. 1) определяет следующую базисную матрицу узловых пар:

$$B_{\eta}^{+} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вектор исходных данных имеет вид

$$\Lambda_v^{mpb} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 100]^t \cdot 10^3.$$

В соответствии с постановкой задачи матрица проекции контравариантного тензора  $L$  в системе координат ветвей предполагается заданной и для рассматриваемого примера равна:

$$L_v^{+} = \begin{vmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot 10^3. \quad (10)$$

В соответствии с тензорным методом расчета узловой сети (рис. 2) нахождение вектора  $\Lambda_v$ , определяющего решение задачи многопутевой маршрутизации, связано с проведением следующих расчетов. Согласно выражению (6) получаем

$$\Lambda_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

В соответствии с выражениями (7) и (10) рассчитываем матрицу проекции метрического тензора в СК узловых пар

$$L_{\eta} = \begin{pmatrix} 800 & -500 & -300 & 0 & 0 \\ -500 & 1200 & 0 & -400 & -300 \\ -300 & 0 & 700 & -100 & -300 \\ 0 & -400 & -100 & 900 & 0 \\ 0 & -300 & -300 & 0 & 800 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

Согласно формульной зависимости (8) определяем вектор проекции задержек в СК узловых пар

$$T_{\eta} = \begin{pmatrix} 0,0039 & 0,0026 & 0,0028 & 0,0015 & 0,0020 \\ 0,0026 & 0,0029 & 0,0022 & 0,0015 & 0,0019 \\ 0,0028 & 0,0022 & 0,0038 & 0,0014 & 0,0022 \\ 0,0015 & 0,0015 & 0,0014 & 0,0020 & 0,0011 \\ 0,0020 & 0,0019 & 0,0022 & 0,0011 & 0,0028 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 0,3943 \\ 0,2646 \\ 0,2773 \\ 0,1484 \\ 0,2032 \end{pmatrix}.$$

Расчет вектора проекции задержек в СК ветвей (5) дает

$$T_v^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3943 \\ 0,2646 \\ 0,2773 \\ 0,1484 \\ 0,2032 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2032 \\ 0,1484 \\ 0,0741 \\ 0,0614 \\ 0,1289 \\ 0,1162 \\ 0,1171 \\ 0,1298 \\ 0,3943 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с выражением (9) рассчитывается вектор пакетных интенсивностей потоков в трактах передачи сети

$$\Lambda_v^+ = \|40,64 \quad 59,36 \quad 22,23 \quad 18,41 \quad 12,89 \quad 46,47 \quad 35,12 \quad 64,88 \quad 0\|^t \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}.$$

Результаты расчета определили, что при передаче пакетов потока интенсивностью  $\cdot 10^5 \quad 1/\text{с}$  от первого узла к шестому минимальная задержка равняется девятой координате вектора задержек в ветвях сети  $T_v^+$  и приблизительно составляет 0,4 с. Нетрудно проверить, что эта задержка является одинаковой для всех четырех путей передачи, причем

- путь  $u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_4 \mapsto u_6$  обеспечивает передачу пакетов потока с интенсивностью  $22,23 \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}$ ;
- путь  $u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_5 \mapsto u_6 - 18,41 \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}$ ;
- путь  $u_1 \mapsto u_3 \mapsto u_4 \mapsto u_6 - 12,89 \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}$ ;
- путь  $u_1 \mapsto u_3 \mapsto u_5 \mapsto u_6 - 46,47 \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}$ .

## II. Тензорные модели ТКС, полученные с использованием базиса разрезов

Как показывает анализ процедуры расчета узловой сети, введение мнимой ветви позволяет выявить те разрезы сети, которые отделяют сток от истока, и суммарный поток через которые равен интенсивности передаваемого между полюсами потока (в нашем случае  $\lambda^{(mp\delta)}$ ). Напомним, что согласно закону сохранения потока алгебраическая сумма потоков в остальных (транзитных) узлах должна быть равна нулю. Например, в сети (рис. 1) только один разрез отделяет сток от истока – это первая узловая пара  $\eta_1$ , и поэтому в векторе  $\Lambda_\eta$  координата, отвечающая первой узловой паре, равна  $\lambda^{(mp\delta)}$ , а все остальные равны нулю. Таким образом, введение мнимой ветви и работа с матрицами  $B_\eta^+$  размера  $\phi \times n^+$  не являются обязательными. В общем случае для неортогонального моделирования ТКС в подпространстве разрезов может применяться не только базис  $B_\eta$ , но и базис  $B_\omega$ , состоящий из линейно независимого множества разрезов, не обязательно центральных, каковыми являются узловые пары. В этом случае исходные данные задаются сразу в виде вектора  $\Lambda_\omega$  (аналог  $\Lambda_\eta$ , но в базисе разрезов), для формирования которого действует следующее правило:

$$\lambda_{(\omega)}^i = \begin{cases} \lambda^{(mp\delta)}, & \text{если } i\text{-й разрез отделяет сток от истока;} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (11)$$

где  $\lambda_{(\omega)}^i$  –  $i$ -я координата вектора  $\Lambda_\omega$ .

Процедура расчета  $\omega$ -сети (т.е. с использованием базиса  $B_\omega$ ) повторяет выражения (4) – (9) с тем лишь отличием, что вместо матрицы  $B_\eta^+$  в них фигурирует матрица базисных разрезов  $B_\omega$  размера  $\phi \times n$ . При этом соответствующая алгебраическая диаграмма несколько упрощается (рис. 3).

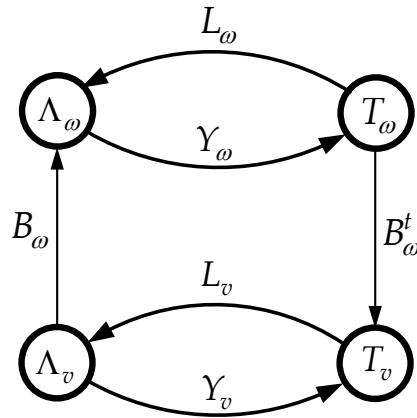


Рис. 3. Алгебраическая диаграмма тензорных моделей ТКС с использованием базиса разрезов

Рассмотрим особенности использования базиса разрезов на примере одномерной сети (рис. 1) при тех же исходных данных: полюсами сети являются первый и шестой узлы, интенсивность передаваемого потока составляет 100 тыс. пакетов в секунду ( $10^5$  1/с). Выберем в качестве базисных следующее множество разрезов (рис. 4):

$$\begin{cases} \omega_1 = v_1 + v_2; \\ \omega_2 = v_3 + v_4 + v_5 + v_6; \\ \omega_3 = v_4 + v_6 - v_8; \\ \omega_4 = v_3 + v_5 + v_8; \\ \omega_5 = v_7 + v_8. \end{cases}$$

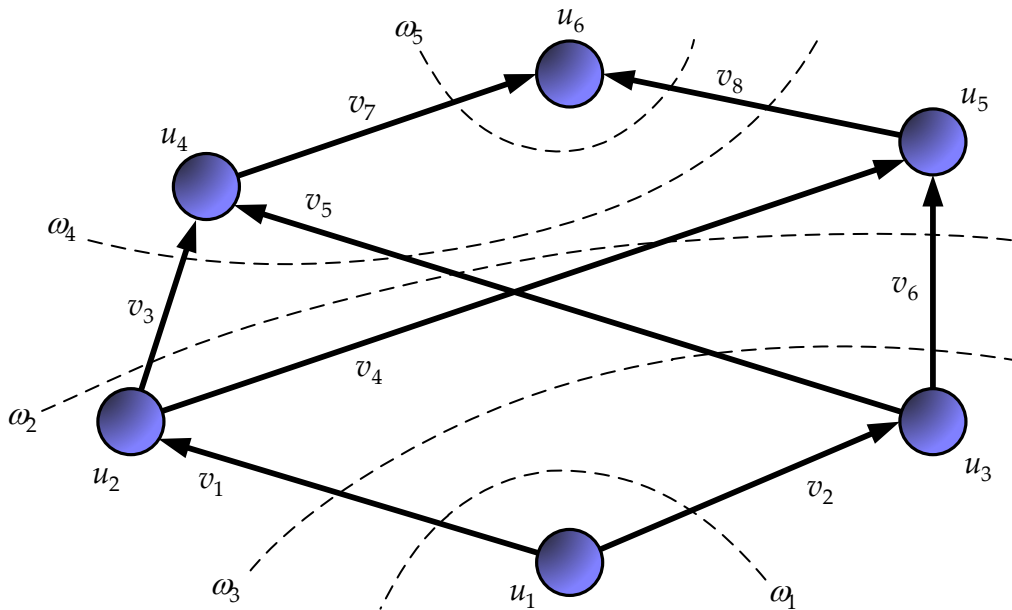


Рис. 4. Структура сети и ее базисное множество разрезов

Тогда базисная матрица разрезов имеет вид

$$B_{\omega} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть известна матрица проекции контравариантного тензора  $L$  в системе координат ветвей (матрица  $L_v$ ), элементы которой представляют собой аппроксимированные постоянными числами контравариантные метрики отдельных трактов передачи рассматриваемой сети, а заданная интенсивность поступающего на обслуживание трафика определяет вектор  $\Lambda_{\omega}$ :

$$L_v = \begin{vmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \end{vmatrix} \cdot 10^3, \quad \Lambda_{\omega} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} \cdot 10^3.$$

В соответствии с выражениями (7), (8) и (5) рассчитываем

$$L_{\omega} = \begin{vmatrix} 600 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 1100 & 500 & 400 & 0 \\ 200 & 500 & 700 & 100 & 0 \\ 0 & 400 & 100 & 900 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 800 \end{vmatrix} \cdot 10^3,$$

$$T_{\omega} = \begin{vmatrix} 0,0020 & 0,0004 & -0,0009 & -0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0019 & -0,0013 & -0,0011 & 0,0007 \\ -0,0009 & -0,0013 & 0,0026 & 0,0005 & -0,0003 \\ -0,0002 & -0,0011 & 0,0005 & 0,0023 & -0,0015 \\ 0,0001 & 0,0007 & -0,0003 & -0,0015 & 0,0022 \end{vmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} \cdot 10^3 = \begin{vmatrix} 0,1484 \\ 0,0614 \\ 0,0548 \\ 0,0127 \\ 0,1171 \end{vmatrix},$$

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0,1484 \\ 0,0614 \\ 0,0548 \\ 0,0127 \\ 0,1171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2032 \\ 0,1484 \\ 0,0741 \\ 0,0614 \\ 0,1289 \\ 0,1162 \\ 0,1171 \\ 0,1298 \end{pmatrix}.$$

Откуда в соответствии с выражением (9) окончательно получаем:

$$\Lambda_v = \|40,64 \ 59,36 \ 22,23 \ 18,41 \ 12,89 \ 46,47 \ 35,12 \ 64,88\|^t \cdot 10^3 \ 1/\text{с}.$$

Сопоставление результирующего вектора  $\Lambda_v$ , полученного с использованием базиса разрезов, с решением, полученным ранее в рамках узловой сети, указывает на их полную идентичность. Это означает тот же порядок многопутевой маршрутизации, связанный с использованием перечисленных выше четырех путей доставки пакетов, при котором достигается минимально возможная в заданных условиях задержка передачи потока от первого узла к шестому, равная 0,4 с.

## Выводы

Таким образом, отдельным направлением в рамках тензорного подхода является неортогональное моделирование, связанное с использованием базисов подпространств векторного пространства структуры ТКС. Поскольку сами подпространства и их базисы имеют размерности меньше, и зачастую существенно меньше общего числа трактов передачи в ТКС, рассмотрение в них тензоров, моделирующих ТКС, обеспечивает снижение размерности решаемой прикладной задачи.

В соответствии с возможными типами неортогональных базисов можно выделить четыре типа неортогональных сетей. Два из них – контурные и узловые – были предложены Г. Кроном. Однако их детальный анализ позволил предложить новые типы неортогонального моделирования с использованием базисов путей и разрезов. Это позволило избежать искусственного введения дополнительной мнимой ветви и тем самым несколько упростить модель и повысить ее прозрачность.

В целом тензорное неортогональное моделирование обеспечивает аналитическое решение следующих двух задач: задачу расчета максимальной интенсивности потока пакетов и определения порядка его маршрутизации при заданной величине межконцевой задержки и задачу многопутевой маршрутизации потока пакетов заданной интенсивности, при которой обеспечивается наименьшая межконцевая задержка. В первом случае предполагается использование базисов контуров и путей, а во втором – базисов узловых пар и разрезов, однако и в том, и в другом случаях необходимым условием применимости данных подходов является принятие гипотезы о постоянстве метрического тензора моделируемой ТКС.

## Список литературы:

1. Лемешко А.В., Евсева О.Ю. Тензорная модель многопутевой маршрутизации с гарантиями качества обслуживания одновременно по множеству разнородных показателей [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 4 (9). – С. 16 – 31. – Режим доступа: [http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124\\_lemeshko\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124_lemeshko_tensor.pdf).
2. Lemeshko O.V., Yevseyeva O.Yu., Garkusha S.V. A Tensor Model of Multipath Routing Based on Multiple QoS Metrics // 2013 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings. – Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12–13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR. - P. 1 – 4.
3. Евсева О.Ю. Исследование метрических свойств тензорных моделей при решении сетевых задач // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. праць. – 2009. – Вып. 54. – С. 81 – 94.
4. Стрелковская И.В., Соловская И.Н. Использование тензорного метода при расчете ТКС, представленной узловой сетью [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2010. – № 1 (1). – С. 68 – 75. – Режим доступа к журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2010/1/1/101\\_strelkovskaya\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2010/1/1/101_strelkovskaya_tensor.pdf).
5. Лемешко А.В., Тимочко А.И., Кравчук А.А. Вероятностная тензорная модель телекоммуникационной системы, представленной одномерной контурной сетью // Системи обробки інформації: Зб. наук. праць. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вып. 12 (40). – С. 118 – 127.
6. Пономарев Д.Ю. Исследование характеристик пакетных сетей узловым методом тензорного анализа // Программные продукты и системы. – 2009. – Вып. 4. – С. 65 – 69.
7. Евсева О.Ю. Классификация пространств и базисов, используемых при геометрическом описании структуры телекоммуникационной сети // Радиотехника: Всеукр. міжвед. науч.-техн. сб. – 2009. – Вып. 159. – С. 14 – 19.
8. Евсева О.Ю. Особенности тензорного неортогонального моделирования телекоммуникационных сетей в условиях постоянных метрик. Часть 1. Тензорное моделирование ТКС с использованием базисов контуров и путей [Электронный ресурс] / О.Ю. Евсева // Проблемы телекоммуникаций. – 2013. – № 2 (11). – С. 12 - 26. – Режим доступа к журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2013/2/1/132\\_evseeva\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2013/2/1/132_evseeva_tensor.pdf).
9. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.