

УДК 621.372.2: 621.396.4

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПРОПУСКНОЇ ЗДАТНОСТІ МІМО КАНАЛІВ З ЗАВМИРАННЯМИ



[М.А. ГРНИК](#)

Королівський технологічний інститут
м. Стокгольм, Швеція



[А.В. ГРНИК](#)

Державний науково-дослідний інститут автоматизованих систем в будівництві
м. Київ, Україна



[Д.А. ГРНИК](#)

Науково-виробниче підприємство «Гіперон»
м. Київ, Україна

Abstract – In this article, utilization of modern analytic methods for the analysis of linear vector fading channels has been proposed on the example of MIMO systems. Two asymptotic methods, namely a method based on random matrix theory and the replica method from statistical physics, have been reviewed and applied to the problem of computation of the achievable ergodic rates and the ergodic capacity of a generic MIMO channel. The first method is based on the limiting distribution of eigenvalues of a quadratic form of the channel matrix, which, in turn, simplifies the computation of the ergodic capacity. The second method takes the advantage of the central limit theorem, large deviations theory and saddle-point integration, being an efficient means for characterization of the system performance under non-Gaussian signaling schemes. Simulation results based on the Monte Carlo method prove the correctness of the presented analysis and its usefulness for the MIMO channels with realistic (small) numbers of antennas. In addition, the numerical results reveal interesting behavior of the ergodic mutual information. Namely, the precision of the approximation becomes significantly worse when non-Gaussian signals are used. Meanwhile, for all the types of channel inputs the precision improves with increasing numbers of antennas. The analysis provided in this article can be of use for the design and implementation of MIMO communications systems.

Анотація – В даній статті запропоновано застосування сучасних аналітичних методів для аналізу лінійних векторних каналів зв'язку з замираннями на прикладі бездротових МІМО систем. Отримано граничний розподіл власних значень квадратичної форми каналної матриці, що спрощує задачу знаходження пропускної здатності. Результати симулювань на основі методу Монте-Карло доводять справедливість наведених викладок та їх придатність для МІМО каналів з реалістичною (невеликою) кількістю антен.

Анотация – В данной статье предложено применение современных аналитических методов для анализа линейных векторных каналов связи с замираниями на примере беспроводных МІМО систем. Получено распределение собственных значений квадратичной формы каналной матрицы, которое упрощает задачу нахождения пропускной способности. Результаты симуляций на основе метода Монте-Карло доказывают справедливость приведенных выкладок и их применимость для МІМО каналов с реалистическим (небольшим) количеством антенн.

Вступ

Багатоантенні системи зв'язку, відомі як *multiple-input multiple-output* (МІМО), інтенсивно досліджуються протягом останнього десятиліття. Перші роботи з постановкою задачі з'явилися вже в 1996 році [1, 2]. Згодом даному напрямку було присвячено низку наукових праць [3-5]. Завдяки істотному виграшу у швидкості передачі інформації технологія МІМО розглядається як одна зі складових майбутнього стандарту для систем зв'язку наступного покоління [6] (див. також [7] для більш детальної інформації про поточний стандарт LTE-Advanced).

Принцип роботи системи МІМО базується на наявності декількох антен з обох сторін каналу зв'язку, тобто як на передавачі, так і на приймачі. Формується декілька «паралельних» каналів зв'язку, що дозволяє значно підвищити пропускну здатність (грубо кажучи, пропорційно кількості задіяних антен), не використовуючи при цьому додаткового частотного спектру. Такий підхід дозволяє ефективно боротися з завмираннями в каналі зв'язку, які викликані багатопроблемним поширенням радіохвиль.

Для ефективної багатоантенної передачі антени з обох боків каналу мають бути достатньо рознесені в просторі (більш ніж на половину довжини хвилі [8]). Завмирання всіх використовуваних сигналів мають бути статистично незалежні, для того щоб ймовірність їх одночасних завмирань була набагато менша за ймовірність завмирання будь-якого одного з них. На жаль, через дане обмеження використання багатоантенного зв'язку на даному етапі не є доцільним в мобільних терміналах (МТ). Типовим прикладом використання МІМО передачі є системи зв'язку на основі стандарту IEEE 802.11 [3].

Зі збільшенням кількості антен усереднюється ефект теплового шуму, а ланка зв'язку залишається обмеженою лише завадами від інших передавачів. В свою чергу, як зазначено в [9], в стільникових системах зв'язку зі збільшенням розміру апертури антенного масиву базова станція (БС) може краще фокусувати промінь на необхідному терміналі, використовуючи при цьому лише лінійні операції, і, як наслідок, можуть бути ефективно ліквідовані завади в межах стільника. Крім того, значне збільшення кількості антен на БС дозволяє зменшити використовувану потужність для передачі до МТ (через когерентне складання потужностей прийнятих сигналів на антенах приймача), що призводить до додаткового зменшення рівня створюваних завад. Відповідні переваги були підтверджені нещодавніми каналними вимірюваннями для реальних систем з великими антенними масивами [10].

Для вказаних систем зв'язку з великим масивом антен на БС термінологія в літературі ще не усталилася. В різних джерелах вони отримали найменування *повномасштабних* (Full-Scale), *повнорозмірних* (Full-Dimension), *масивних* (Massive) та *гіпер-МІМО* (HyperMIMO) систем (див. оглядові статті [6], [11] та відповідні посилання в них). В цій статті будемо користуватись останнім терміном, тобто “гіпер-МІМО”.

В даний час гіпер-МІМО системи є предметною областю одного з передових напрямків сучасних досліджень в теорії зв'язку. Слід зазначити, що успіхи в побудові експериментальних зразків МІМО систем зв'язку в діапазоні 60 ГГц [12] доводять майбутню практичну застосовність гіпер-МІМО систем. У цьому діапазоні просторове рознесення антен, необхідне для ефективної передачі, складає всього кілька міліметрів, а тому розмір антенного масиву дає можливість практичної реалізації його навіть в МТ. Крім того, перехід до діапазону міліметрових хвиль дозволить вирішити сучасну проблему зайнятості спектра, відведеного для систем зв'язку. Таким чином, аналіз МІМО систем з великими антенними масивами, як систем високошвидкісного зв'язку наступного покоління, є сьогодні актуальною теоретичною задачею.

В даній роботі розглянуто два ефективні методи для аналізу МІМО систем зв'язку, які базуються на результатах теорії випадкових матриць, а також статистич-

ної фізики. Обидва методи оснований на припущенні, що кількість антен на БС та МТ прямує до нескінченності. Хоча це припущення не є обґрунтованим з практичної точки зору, числові результати показують, що отримані наближення залишаються досить точними навіть у випадку невеликої реальної кількості антен в МІМО каналі. Так, за допомогою зазначених вище методів в статті отримано явні вирази для пропускної здатності $M \times N$ МІМО каналу зв'язку зі швидкими завмираннями в ліміті, $N, M \rightarrow \infty$. Результати числових симулювань за допомогою методу Монте-Карло доводять, що отримана апроксимація досить повно відображає поведінку реальної МІМО системи з $N, M = 2, 4, 6$ (див. розділ 4).

Поштовху для розвитку досліджень випадкових матриць надали задачі ядерної фізики, в рамках вирішення яких Вігнером вперше було отримано розподіл власних чисел певного класу великих матриць [13]. Згодом результат було узагальнено для будь-яких матриць з незалежними та ідентично розподіленими елементами [14]. В подальшому, область досліджень сформувався в теорію випадкових матриць, огляд основних принципів та результатів якої наведено в [15]. Використання цих методів для аналізу систем зв'язку почалося досить недавно. Вже в одній з перших робіт, присвячених багатоантенним системам зв'язку [2], методи теорії випадкових матриць використовуються для знаходження пропускної здатності МІМО каналу. Згодом вказані методи були використані в [16] та [17] для аналізу систем з кодовим розділенням каналів (CDMA), а також в [2] та [18] для аналізу пропускної здатності МІМО каналів зв'язку. Звертаємо увагу читача на дві свіжі монографії, [19] та [20], які присвячені методам теорії випадкових матриць для аналізу сучасних систем зв'язку.

Альтернативний до теорії випадкових матриць метод реплік був започаткований в області статистичної фізики Кацом в [21], а згодом застосований Едвардсом та Андерсоном в [22] для аналізу магнітних матеріалів, іменованих *спіновим склом*. Цей метод дозволяє оцінити середнє значення логарифма статистичної суми системи і, таким чином, обчислити її макроскопічні параметри (як то намагніченість). З точки зору фізики спінового скла метод реплік блискуче описаний в [23]. До задач з теорії зв'язку метод вперше був застосований фізиком Сурля в роботі [24], де було проаналізовано показники кодів з низькою щільністю перевірок на парність (так званих LDPC-кодів). Втім вважається, що у саму теорію зв'язку метод реплік був введений Танакою [25] для оцінки спектральної ефективності та ймовірності бітової помилки в CDMA системах. Згодом результат було розширено на сигнали з розподілом потужностей [26] та застосовано для аналізу пропускної здатності МІМО каналів з релеєвськими завмираннями [26, 28]. В роботах [29, 30] знайдено спектральну ефективність МІМО системи в присутності завад від іншого користувача. Попередні результати були також узагальнені для райсівських завмирань [31, 32]. Застосування обох вищезгаданих асимптотичних методів для систем зв'язку розглянуто в теоретичному огляді [33], а також у монографії [34].

Структура статті: Розділ 1 присвячено постановці задачі аналізу пропускної здатності. Дві згадані вище групи методів детально описані у розділах 2 та 3 відповідно. У розділі 4 наведено результати числових симулювань та на їх основі описано

відповідні спостереження. В останньому розділі підведено підсумок та зроблено висновки з роботи.

Використані позначення:

\mathbf{a} – вектор;

\mathbf{A} – матриця;

\mathcal{A} – множина;

$E_a\{\cdot\}$ – математичне очікування від аргументу за розподілом змінної a ;

$\ln(\cdot)$ – натуральний логарифм від аргументу;

$\delta(\cdot)$ – функція Дірака від аргументу;

\otimes – добуток Кронекера;

$\|\cdot\|$ – норма Фробеніуса від аргументу;

$\#\{\cdot\}$ – потужність множини-аргументу;

$\text{Re}\{\cdot\}$ та $\text{Im}\{\cdot\}$ – дійсна та уявна частина аргументу відповідно;

$(a)^+ = \max\{a, 0\}$;

$\det(\mathbf{A})$ – визначник матриці \mathbf{A} ;

$\text{tr}\{\mathbf{A}\}$ – слід матриці \mathbf{A} ;

\mathbf{A}^T – операція транспонування матриці \mathbf{A} ;

\mathbf{A}^H – операція Ермітового спряження матриці \mathbf{A} ;

$[\mathbf{A}]_{i,j}$ – елемент (i, j) матриці \mathbf{A} ;

\mathbf{I}_N – одинична матриця розміру $N \times N$;

$\mathbf{0}_N$ – вектор нулів довжини N ;

$\mathbf{1}_N$ – вектор одиниць довжини N ;

$\mathbf{a}^{(i)}$ – i -та репліка вектора \mathbf{a} ;

$j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця;

$\text{CN}(m, \nu)$ – циркулярно симетричний комплексний гаусівський розподіл з математичним очікуванням m та дисперсією ν ;

\mathbb{N} – множина натуральних чисел;

\mathbb{R} – множина дійсних чисел;

\mathbb{C} – множина комплексних чисел.

1. Постановка задачі

MIMO канал зв'язку з замираннями, зображений на рис. 1, описується наступним співвідношенням між входом і виходом:

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{\rho}{M}} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

де $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ – сигнальний вектор, отриманий приймачем; $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$ – сигнальний вектор, надісланий передавачем (з коваріаційною матрицею $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \mathbf{I}_M$); $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times M}$ – каналъ-

на матриця релеевських завмирань розміром $N \times M$, кожен елемент якої розподілений згідно $CN(0,1)$, тобто канал підданий релеевським завмиранням; N – кількість приймальних антен; M – число передавальних антен; \mathbf{n} – вектор комплексного адитивного білого гаусівського шуму (АБГШ), розподіленого згідно $CN(0_N, I_N)$; ρ – відношення сигнал-шум (С/Ш) на виході передавача. Для спрощення обчислень припустимо, що елементи H , \mathbf{n} та \mathbf{x} статистично незалежні та ідентично розподілені.

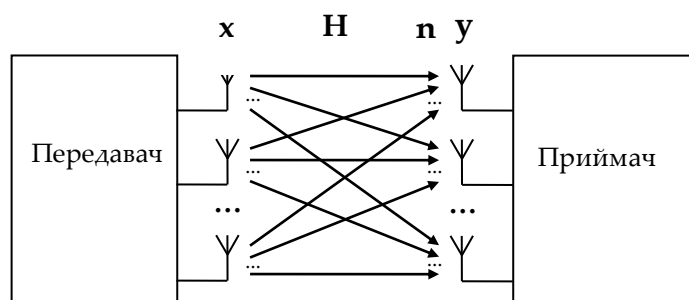


Рис. 1. МІМО канал зв'язку з завмираннями

Для відтворення переданого сигналу \mathbf{x} з прийнятого зашумленого сигналу \mathbf{y} , приймач має бути забезпечений інформацією про стан каналу (ІСК). Іншими словами, приймач повинен знати реалізацію каналної матриці H . Дана інформація отримується за допомогою стандартних методів, базованих на пілот-сигналах [35].

За наявності ІСК на приймальній стороні швидкість передачі інформації між передавачем та приймачем визначається взаємною інформацією між вхідним та вихідним векторами \mathbf{x} та \mathbf{y} [36]. Оскільки ІСК за наявності завмирань – випадкова змінна, то за умови ергодичності випадкового процесу H нормалізована швидкість передачі інформації (в нат/с/Гц) в каналі (1) визначається як [37]

$$I(\rho) = \frac{1}{N} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{N} [h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y} | \mathbf{x})] = -\frac{1}{N} E_{\mathbf{y}, H} \ln E_{\mathbf{x}} \{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, H)\} + \frac{1}{N} E_{\mathbf{y}, \mathbf{x}, H} \ln p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, H), \quad (2)$$

де умовний вихідний розподіл каналу (1) має вигляд

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, H) = \frac{1}{\pi^N} e^{-\left\| \mathbf{y} - \sqrt{\frac{\rho}{M}} H \mathbf{x} \right\|^2}.$$

Пропускна здатність даного векторного гаусівського каналу визначена як максимально можливе значення швидкості передачі інформації (2) та досягається за умови використання гаусівських сигналів. В каналі зі швидкими завмираннями нормалізована пропускна здатність має вигляд [37]:

$$C(\rho) = \frac{1}{N} \mathbf{E}_H \left\{ \ln \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\}. \quad (3)$$

Проблема полягає в тому, що явний вираз для (3) невідомий, а аргумент має бути усереднений за розподілом каналної матриці. З практичної точки зору пропускна здатність (3) може бути обчислена за допомогою методу Монте-Карло [38]:

$$C(\rho) \approx \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \ln \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\rho}{M} \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^H \right), \quad (4)$$

де \mathbf{H}_k – k -та реалізація ергодичного випадкового процесу \mathbf{H} .

Хоча для великих значень K вираз (4) збігається до істинного значення (3) і дає непогане уявлення про залежність пропускної здатності каналу від $C/\text{Ш}$, він не є зручним виразом для подальшого використання. Наприклад, задача оптимального розподілу потужностей в мережі вимагає явного виразу для пропускної здатності ланки, який може бути використаний у відповідному алгоритмі.

Один із способів вирішення даної проблеми передбачає обчислення нижньої чи верхньої границь для (3) в явному вигляді. Наприклад, в [39] було показано, що для пропускної здатності в (3) справджується наступне:

$$C(\rho) \geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^t \ln \left[1 + \frac{\rho}{M} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-i} \frac{1}{j} - \gamma \right) \right], \quad (5)$$

де $t = \min\{M, N\}$, $s = \max\{M, N\}$, $\gamma = 0,57721566$ – стала Ейлера-Маскероні. Тим часом з [40] відомо, що

$$C(\rho) \leq \frac{1}{N} \left[t \ln \frac{\rho}{M} + \ln t! + \ln L_t^{s-t} \left(-\frac{M}{\rho} \right) \right], \quad (6)$$

де $L_n^m(\lambda)$ позначає узагальнений поліном Лагерра n -того порядку [41], що має вигляд:

$$L_n^m(\lambda) = \frac{1}{n!} e^{\lambda} \lambda^m \frac{d}{d\lambda} (e^{-\lambda} \lambda^{m+n}).$$

Див. також [42] та [43] для додаткової інформації щодо обчислення верхньої та нижньої границь.

Однак вищезгаданий підхід має ряд недоліків. Наприклад, отримані границі є лише наближенням справжньої пропускної здатності. Точність наближення залежить від області $C/\text{Ш}$, для якої кожна границя виведена. Таким чином, для роботи з усіма

значеннями С/Ш необхідно обчислювати декілька границь, які дають достатню точність апроксимації для кожної ділянки С/Ш, що створює незручності для подальшої оптимізації, тоді як апроксимація пропускної здатності (3), виведена в даній статті, справджується для будь-якого значення С/Ш. Точність наближення в залежності від кількості антен, наявних в МІМО каналі. Крім того, як показують числові симуляції, апроксимація досить точна для систем з реалістичною кількістю антен (напр., $M, N = 2, 4, 6$).

2. Апроксимація за допомогою теорії випадкових матриць

2.1. Основні використані положення теорії випадкових матриць

В даному розділі приводяться основні поняття та методи теорії випадкових матриць, що будуть пізніше використані для здійснення апроксимації пропускної здатності МІМО каналу.

2.1.1. Самоусереднення: Припустимо, що стан деякої системи описується матрицею H розміру $N \times M$ з незалежними та ідентично розподіленими елементами, що відображає мікроскопічні взаємодії між елементами системи. Нехай деякий досліджуваний макроскопічний параметр q залежить від H . Якщо розміри системи N та M прямують до нескінченності, залежність q від елементів $[H]_{i,j}, \forall i, j$ поступово зникає. Іншими словами, не зважаючи на те, що матриця H складається з випадкових елементів, вираз для $q(H)$ збігається до детермінованої функції від статистики H .

Для ілюстрації цього твердження приведемо приклад з [33]. Нехай $h_i(t)$ – стохастичний процес з нульовим середнім, де t позначає відлік часу, а i – індекс ансамблю. Припустимо, що процес $h_i(t)$ ергодичний і може бути повністю статистично описаний за допомогою своїх моментів. Ми можемо згрупувати реалізації $h_i(t)$ в наступну матрицю:

$$H = \begin{bmatrix} h_1(1) & h_1(2) & \dots & h_1(M) \\ h_2(1) & h_2(2) & \dots & h_2(M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_N(1) & h_N(2) & \dots & h_N(M) \end{bmatrix}.$$

При $N, M \rightarrow \infty$ матриця H містить всю необхідну інформацію для описання процесу $h_i(t)$. При цьому H є однією реалізацією матричної випадкової змінної. Таким чином, однієї реалізації H достатньо для обчислення макроскопічних параметрів, а як наслідок, відпадає необхідність усереднення за H . У фізичній літературі [23], [33] дане явище описується поняттям *самоусереднення*, що, повертаючись до макроскопічного параметра q , може бути записане в наступному вигляді. При $N, M \rightarrow \infty$ маємо

$$E_H \{q(H)\} \rightarrow q(H).$$

Даний ліміт у фізичній літературі називається *термодинамічною границею* [23].

Для ілюстрації визначимо наступний вектор:

$$h = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^M [H]_{i,j},$$

елементами h_i якого є нормалізовані суми рядків матриці H . Згідно центральної граничної теореми при $N, M \rightarrow \infty$ h збігається до гаусівського вектора з нульовим середнім. Виберемо в якості $q(H)$ наступну функцію:

$$F_h(x) = \frac{\#\{h_i : h_i < x\}}{N},$$

що є емпіричною функцією розподілу $h_i, \forall i$. За умови $N \rightarrow \infty$ $F_h(x)$ збігається до гаусівського розподілу незалежно від розподілу елементів матриці H . Крім того, при усередненні за розподілом H кінцевий результат для $F_h(x)$ не змінюється.

2.1.2. Граничний розподіл власних значень матриці: Власне значення матриці H визначається як скаляр λ такий, що дія матриці H на певний ненульовий вектор x рівносильна добутку x з λ . Іншими словами,

$$Hx - \lambda x = 0,$$

де x називається (правим) власним вектором матриці H . Будь-яка матриця розміром $N \times M$ має не більше, ніж $\min\{N, M\}$ ненульових власних значень, і знаходження їх розподілу є важливою задачею в аналізі лінійних систем.

Для аналізу систем бездротового зв'язку часто необхідно знайти розподіл власних значень матриць наступного вигляду

$$W = \frac{1}{M} H H^H,$$

що, наприклад, фігурує в (3) як змінна, з якою необхідно усереднити вираз. Слід зазначити, що якщо елементи H мають гаусівський розподіл з нульовим середнім, матриця W називається матрицею Вішарта з M степенями свободи. Коли розміри матриці H нескінченно збільшуються ($N, M \rightarrow \infty$) при сталому відношенні $\beta = N/M$, густина розподілу її власних чисел W збігається до детермінованої функції

$$f_{\beta}(x) = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^+ \delta(x) + \frac{\sqrt{(x-a)^+(b-x)^+}}{2\pi\beta x},$$

де $a = (1 - \sqrt{\beta})^2$ та $b = (1 + \sqrt{\beta})^2$, що репрезентують найменшу та найбільшу власні величини відповідно. Даний результат був вперше отриманий в [14] і в літературі називається *законом Марченко-Пастура*. Він не обмежується гаусівськими матрицями, а справджується для матриць N з будь-яким розподілом елементів за умови, що вони незалежні та ідентично розподілені, мають нульове середнє та одиничну дисперсію.

2.1.3. Перетворення Стільтьєса: Для роботи з задачею знаходження розподілу за відомими моментами Стільтьєсом було введено наступне перетворення [19]. Нехай $F(x)$ – функція розподілу на осі дійсних чисел. Її *перетворення Стільтьєса* визначається для уявної змінної $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ як

$$m_F(z) = \int \frac{1}{x-z} dF(x).$$

Позначивши $z = x + jy$, можна визначити також обернене перетворення як

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\{m_F(x + jy)\}.$$

Перетворення Стільтьєса містить всю інформацію про розподіл і в деяких випадках працювати з даним перетворенням набагато легше, ніж з самою функцією розподілу.

2.1.4. Перетворення Шеннона: Дане перетворення вперше введено в [19] і було мотивоване виглядом виразу (3), що є узагальненою формулою Шеннона для пропускну здатності каналу [45]. Для функції розподілу $F(x)$ *перетворення Шеннона* визначається як

$$V_F(y) = \int_0^{\infty} \ln(1 + xy) dF(x). \quad (7)$$

Дане перетворення однозначно пов'язане з перетворенням Стільтьєса наступною формулою:

$$V_F(y) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} - m_F(-x) \right) dx. \quad (8)$$

2.2. Застосування теорії до аналізу пропускну здатності МІМО систем

В даному розділі ми застосуємо наведені раніше результати і методи для обчислення пропускну здатності МІМО каналу з завмираннями. Для простоти викладок припустимо, що $\beta > 1$, тобто передавач має більше антен, ніж приймач. Головний результат цього розділу сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 1. Для некорельованого $M \times N$ МІМО каналу зв'язку з релеєвськими завмираннями та АБГШ за умови гаусівських незалежних та ідентично розподілених вхідних сигналів нормалізована пропускну здатність (3) в термодинамічному ліміті може бути апроксимована як

$$C(\rho) \rightarrow \bar{C}(\rho) = \ln[1 + \rho - \varphi(\rho, \beta)] + \frac{1}{\beta} \ln[1 + \rho\beta - \varphi(\rho, \beta)] - \frac{1}{\rho\beta} \varphi(\rho, \beta), \quad (9)$$

$$\text{де } \varphi(\rho, \beta) = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\rho(1 + \sqrt{\beta})^2 + 1} - \sqrt{\rho(1 - \sqrt{\beta})^2 + 1} \right]^2.$$

Доведення: Запишемо (2) у наступному вигляді:

$$C(\rho) = \frac{1}{N} \mathbf{E}_H \left\{ \ln \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\} = \mathbf{E}_\lambda \{ \ln(1 + \rho\lambda(W)) \} = \underbrace{\int \ln(1 + \rho\lambda(W)) dF_W(\lambda)}_{=V_F(\rho)}.$$

Таким чином, пропускну здатність визначається перетворенням Шеннона від функції розподілу власних чисел $F_W(x)$ матриці Вішарта W . Для обчислення даного перетворення використаємо співвідношення (8). Беручи до уваги той факт, що розподіл власних чисел W в термодинамічній границі збігається до закону Марченко-Пастура, перетворення Стільтьєса від емпіричного розподілу $F_W(x)$ власних значень W збігається до відповідного перетворення Стільтьєса $m_F(z)$ від закону Марченко-Пастура:

$$m_W(z) \rightarrow m_F(z) = \frac{-\beta - 1 - z}{2\beta z} \pm \frac{\sqrt{(\beta - 1 - \beta z)^2 - 4\beta z}}{2\beta z},$$

де знак обирається в залежності від β таким чином, щоб $m_F(z) \in \mathbb{R}$ та $m_F(z) > 0$ для дійсного $z < 0$. Тепер, з (8) ми маємо апроксимацію для $C(\rho)$ у вигляді:

$$\bar{C}(\rho) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} + \frac{\beta + 1 - z}{2\beta z} \mp \frac{\sqrt{(\beta - 1 + \beta z)^2 + 4\beta z}}{2\beta z} \right) dz,$$

що після обчислення інтеграла зводиться до (9).

Те, що і потрібно було довести.

З наведеної вище теореми видно, що отриманий результат не залежить від випадковості каналу. Він даний у явному вигляді, а тому досить легко обчислюється. Крім того, як буде показано в розділі 4, він досить точно описує поведінку пропуску-

ної здатності (3) навіть для систем з невеликою кількістю антен. Даний результат було вперше отримано в [17] для систем зв'язку CDMA.

3. Апроксимація за допомогою методу реплік

3.1. Основні використовувані положення статистичної фізики

Даний розділ присвячений основним концепціям та методології, необхідним для виведення апроксимації швидкості передачі інформації МІМО каналом. Ми також проведемо певні паралелі між теорією зв'язку та моделями статистичної механіки.

Для початку розглянемо систему, що складається з M мікроскопічних частинок (напр., спінове скло [23]), що складають її конфігурацію, позначену через x . В залежності від реалізації x система може мати різні значення енергії. Енергія системи пов'язана зі станом x через *гамільтоніан* $H(x)$.

Позначимо ймовірність знаходження системи в стані x через $p(x)$. Тоді *середня енергія* системи обчислюється як

$$E = \sum_x p(x)H(x). \quad (10)$$

Інша важлива характеристика системи – її *ентропія*, тобто міра безладу, присутнього в системі, визначена як

$$S = -\sum_x p(x)\ln p(x). \quad (11)$$

3.1.1. Розподіл Больцмана: Згідно другого закону термодинаміки за термодинамічної рівноваги значення енергії (10) зберігається, в той час як ентропія системи (11) досягає свого максимального значення. При цьому розподіл $p(x)$, за якого ентропія S максимізується, називається *розподілом Больцмана* і має наступний вигляд:

$$p(x) = Z^{-1} e^{-\frac{1}{k_B T} H(x)}, \quad (12)$$

де $T \geq 0$ – абсолютна температура, $k_B = 1,3806488 \cdot 10^{-23}$ [Дж / моль К] – стала Больцмана, в той час як Z – нормалізаційний множник, що має вираз

$$Z = \sum_x e^{-\frac{1}{k_B T} H(x)} \quad (13)$$

та називається *статистичною сумою* системи. Статистична сума Z характеризує кількість доступних енергетичних станів системи за заданої температури. В статистичній фізиці постулюється, що будь-яка макроскопічна характеристика системи, на-

приклад, намагніченість спінового скла, може бути обчислена напряму зі статистичної суми.

3.1.2. Вільна енергія Гельмгольца: В деяких випадках замість статистичної суми (13) доцільніше обчислювати іншу фундаментальну характеристику, а саме *вільну енергію Гельмгольца*, дану як:

$$F = E - k_B T S. \quad (14)$$

Так, наприклад, вільна енергія Гельмгольца має безпосередній зв'язок з диференційною ентропією вхідного сигналу нашого МІМО каналу.

Крім того, вільна енергія часто має згадану вище властивість самоусереднення за розподілом певних мікроскопічних параметрів. Дані параметри є випадковими величинами, але є незмінними в часі, а тому називаються *замороженим безладом*. Прикладом такого безладу є спін-спінова взаємодія, що залежить лише від реалізації спінового скла, але є сталою в часі. У випадку МІМО каналу зв'язку замороженим безладом є канална матриця H та вхідний сигнал x .

Наявність самоусереднення було доведено в контексті CDMA систем в [46]. Таким чином, самоусереднення гарантує збіжність макроскопічних характеристик системи в термодинамічному ліміті до детермінованих величин. У випадку МІМО каналу зв'язку основні показники системи (як то пропускна здатність, ймовірність бітової помилки тощо) самоусереднюються за каналними коефіцієнтами та переданими сигналами і збігаються до детермінованих виразів, що мають явний вигляд.

3.1.3. Метод реплік: За допомогою (10)-(14) може бути показано, що вільна енергія пов'язана зі статистичною сумою за допомогою наступного співвідношення:

$$F = -k_B T \mathbf{E}_x \{ \ln Z \}. \quad (15)$$

На жаль, обчислення середнього значення логарифму в (15) – дуже складне завдання. Для вирішення даної проблеми і було запропоновано метод реплік [21, 22].

Метод полягає в наступних кроках [26]:

1) Використання співвідношення

$$F = -k_B T \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial u} \ln \mathbf{E}_x \{ Z^u \}, \quad (16)$$

де оператор математичного очікування переміщено всередину логарифма.

2) Припущення, що $u \in \mathbb{N}$ є натуральним числом і обчислення u -того моменту $\mathbf{E}_x \{ Z^u \}$. Для цього віртуально ввести до розгляду u незалежних реплік (чи копій) системи зі статистичними сумами Z_1, \dots, Z_u і обчислити $\mathbf{E}_x \{ Z_1 Z_2 \dots Z_u \}$.

3) Припущення, що попередній результат також справджується для дійсних значень $u \in \mathbb{R}$ та обчислення вільної енергії згідно з (16).

Таким чином, з наведеного вище видно, що метод реплік не є строго обґрунтованим, оскільки припущення в третьому кроці не доведене в загальному випадку. Проте, отримане рішення може бути перевірене за допомогою числових симуляцій (див. розділ 4). Також, в [46] показано, що рішення за допомогою методу реплік є верхньою границею справжньої швидкості передачі інформації для дискретних сигнальних сузір'їв. Крім того, для гаусівських сигналів результат співпадає з результатом, отриманим за допомогою інших, строго обґрунтованих, методів (див. розділ 2, а також [46, 47]).

3.2. Застосування теорії до аналізу пропускної здатності MIMO систем

На жаль, ефективність методів з теорії випадкових матриць, описаних в розділі 2, обмежена припущенням використання гаусівських вхідних сигналів. Дане припущення є дещо ідеалістичним, оскільки на практиці в системах зв'язку, як правило, використовуються дискретні сигнальні сузір'я, як то *квадратурна фазова маніпуляція* (відома в літературі як QPSK) чи *квадратурна амплітудна модуляція* (відома як QAM). Таким чином, для аналізу реальних систем зв'язку теорії випадкових матриць недостатньо. Тим не менш, такий аналіз все ж може бути виконаний за допомогою вищезгаданого методу реплік.

В даному розділі ми виведемо апроксимацію виразу (2) в термодинамічному ліміті $N, M \rightarrow \infty$. Для цього нагадаємо відповідний вираз у вигляді різниці диференціальних ентропій:

$$I(\rho) = -\frac{1}{N} \mathbf{E}_{y, H} \ln \mathbf{E}_x \{p(y|x, H)\} + \frac{1}{N} \mathbf{E}_{y, x, H} \ln p(y|x, H). \quad (17)$$

В (17) ми знову стикаємося з проблемою обчислення середнього значення логарифму. Однак за допомогою методу реплік ми можемо отримати наступний результат.

Теорема 2. Для некорельованого $M \times N$ MIMO каналу зв'язку з релеєвськими завмираннями та АБГШ за умови незалежних та ідентично розподілених вхідних сигналів нормалізована швидкість передачі інформації (17) в термодинамічному ліміті може бути апроксимована як

$$I(\rho) \rightarrow \bar{I}(\rho) = \frac{1}{\beta} I(z; x | \sqrt{\rho \xi}) + \ln(1 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon \xi}{\beta}, \quad (18)$$

де параметри $\{\xi, \varepsilon\}$ є рішенням наступної нелінійної системи рівнянь:

$$\xi = \beta(1 + \varepsilon)^{-1}, \quad (19)$$

$$\varepsilon = \rho \mathbf{E}_{z,x} \left\{ |x - \hat{x}|^2 \right\}, \quad (20)$$

в якій $I(z; x | \sqrt{\rho\xi})$ та $\mathbf{E}_{z,x} \left\{ |x - \hat{x}|^2 \right\}$ позначають взаємну інформацію та мінімальне середньоквадратичне відхилення (СКВ), пов'язані з детермінованим скалярним гаусівським каналом зв'язку $z = \sqrt{\rho\xi}x + w$, де шум $w \sim \mathbf{CN}(0,1)$.

Доведення: Оскільки шум в каналі за припущенням є комплексним АБГШ, умовна густина розподілу ймовірностей в (17) має вигляд:

$$p(y|x, \mathbf{H}) = \frac{1}{\pi^N} e^{-\|y - \mathbf{H}x\|^2}.$$

Таким чином, умовна диференціальна ентропія в (17) може бути записана як

$$h(y|x) = N \ln \pi + \mathbf{E}_{y,x,\mathbf{H}} \left\{ \|y - \mathbf{H}x\|^2 \right\} = N(\ln \pi + 1).$$

Нам залишається обчислити диференційну ентропію прийнятого сигналу $h(y)$. Оскільки $h(y)$ є вільною енергією Гельмгольца в межах відповідної моделі термодинамічної системи (як показано в [26]), вона може бути переписана за допомогою (16) як:

$$F = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial u} \ln \mathbf{E}_{y,\mathbf{H}} \left\{ Z^u(y, \mathbf{H}) \right\} = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial u} \ln \mathbf{E}_{y,\mathbf{H}} \left\{ \prod_{a=1}^u Z^{(a)}(y, \mathbf{H}) \right\}. \quad (21)$$

Тобто статистична сума системи в даному рівнянні має u ідентичних реплік. З (21) видно головну проблему методу реплік, а саме – невідповідність між двома частинами рівняння. З одного боку, всередині оператора математичного очікування, очевидно, $u \in \mathbf{N}$, що виражає кількість множників даного виразу. З іншого боку, поза межами дії даного оператора ми маємо обчислити границю при $u \rightarrow 0^+$, а значить $u \in \mathbf{R}$. Даний парадокс складає один з головних недоліків методу, оскільки невідомо, за яких умов справджується дане узагальнення від натуральних до дійсних чисел [48]. Як правило, дана можливість є припущенням, яке потім тестується результатами числових симуляцій (див. розділ 4).

Припустимо, що наведене вище узагальнення справедливе, а також, що введені репліки статистично незалежні. Тепер сфокусуємось на внутрішній частині (21). Перепишемо її в наступному вигляді:

$$\mathbf{E}_{y,H} \{Z^u(y, H)\} = \mathbf{E}_{X,H} \left\{ \int \frac{1}{\pi^N} \prod_{a=0}^u e^{-\|y - \sqrt{\frac{\rho}{M}} \mathbf{Hx}^{(a)}\|^2} dy \right\},$$

де $X = [x^{(0)T}, \dots, x^{(u)T}]^T \in \mathbb{C}^{M(u+1)}$. Введемо новий вектор, визначений як

$$V = \left[\sqrt{\frac{\rho}{M}} \mathbf{Hx}^{(0)T}, \dots, \sqrt{\frac{\rho}{M}} \mathbf{Hx}^{(u)T} \right] \in \mathbb{C}^{N(u+1)}.$$

Згідно центральної граничної теореми, в термодинамічному ліміті даний вектор збігається до комплексного гаусівського вектора з нульовим середнім. Коваріаційна матриця даного вектора складається з елементів $[K]_{a,b} = \frac{\rho}{M} x^{(b)T} x^{(a)}$, для всіх $(a, b) \in \{0, \dots, u\}$. Перепишемо тепер усереднення за X у вигляді інтеграла за ймовірнісною мірою $\mu(K)$:

$$\mathbf{E}_{y,H} \{Z^u(y, H)\} = \int \exp[G(K)] d\mu(K) + O(1),$$

де остання складова позначає константу, що зникає при $N, M \rightarrow \infty$. Функція $G(K)$ може бути обчислена за допомогою гаусівського інтеграла [49]

$$G(K) = -N \ln \pi(u+1) - \ln \det(\mathbf{I}_{N(u+1)} + K\Sigma \otimes \mathbf{I}_N),$$

де $\Sigma = \mathbf{I}_{u+1} - 1/(u+1) \mathbf{1}_{u+1} \mathbf{1}_{u+1}^T \in \mathbb{R}^{(u+1) \times (u+1)}$. Відповідна ймовірнісна міра має вигляд:

$$\mu(K) = \mathbf{E} \left\{ \prod_{a,b=0}^u \delta(\rho x^{(b)H} x^{(a)} - M[K]_{a,b}) \right\}.$$

Наступним кроком є обчислення твірної функції моментів:

$$\phi(\tilde{K}) = \mathbf{E}_x \left\{ \exp[\rho X^H (\tilde{K} \otimes \mathbf{I}_M) X] \right\}.$$

Згідно теореми Крамера [50], в термодинамічному ліміті міра $\mu(K)$ домінована експонентою від функціоналу, отриманого перетворенням Лежандра-Фенхеля [51] від $\ln \phi(\tilde{K})$. Далі, згідно теореми Варадхана [50], в термодинамічному ліміті

$$\ln \mathbf{E}_{y,H} \{Z^u(y, H)\} \rightarrow \max_K \left\{ G(K) - \max_{\tilde{K}} \{M \operatorname{tr}\{\tilde{K}K\} - \ln \phi(\tilde{K})\} \right\},$$

що приводить нас до наступного виразу

$$F = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial u} \min_{\mathbf{K}} \max_{\tilde{\mathbf{K}}} \left\{ N \ln \pi(u+1) + \ln \det(\mathbf{I}_{N(u+1)} + \mathbf{K}\Sigma \otimes \mathbf{I}_M) + \right. \\ \left. + M \operatorname{tr}\{\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}\} - \ln \mathbf{E}_x \left\{ \exp[\rho \mathbf{X}^H (\tilde{\mathbf{K}} \otimes \mathbf{I}_M) \mathbf{X}] \right\} \right\}. \quad (22)$$

Таким чином, вільна енергія Гельмгольца знаходиться як сідлова точка певної задачі оптимізації. На жаль, в загальному вигляді ця задача не може бути вирішена, а тому для спрощення обчислень вводиться так званий *анзац реплікової симетрії* (РС). Тобто припускається заздалегідь, що матриці \mathbf{K} та $\tilde{\mathbf{K}}$ мають наступну структуру:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} p & q & \cdots & q \\ q & p & \cdots & q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q & q & \cdots & p \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{p} & \tilde{q} & \cdots & \tilde{q} \\ \tilde{q} & \tilde{p} & \cdots & \tilde{q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{q} & \tilde{q} & \cdots & \tilde{p} \end{bmatrix},$$

де зникає залежність від індексів реплік (штучно введених нами раніше). При цьому спрощується до

$$F = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial u} \min_{\mathbf{K}} \max_{\tilde{\mathbf{K}}} \left\{ N \ln \pi(u+1) + uN \ln \det(1+p-q) + M(u+1)(\tilde{p}p - \tilde{q}q) - \right. \\ \left. - \ln \int \mathbf{E}_x \left\{ \exp[-\|z - \mathbf{A}x\|^2 x^H \mathbf{B}x] \right\} \left[\mathbf{E}_x \left\{ \exp[z^H \mathbf{A}x + x^H \mathbf{A}z - x^H (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B})x] \right\} \right]^u dz \right\}. \quad (23)$$

В цьому виразі ми позначили $\mathbf{A} = \sqrt{p\tilde{q}}\mathbf{I}_M$ та $\mathbf{B} = \sqrt{p\tilde{p}}\mathbf{I}_M$. Для того щоб знайти сідлову точку мінімаксної проблеми (23), необхідно прирівняти до нуля похідні від аргументу за усіма параметрами: p , q , \tilde{p} та \tilde{q} , при $u \rightarrow 0^+$. Виконавши ці обчислення, отримуємо наступні умови для сідлової точки:

$$p - q = \frac{\rho}{M} \mathbf{E}_{z,x} \left\{ \|x - \hat{x}\|^2 \right\}, \quad \tilde{q} = \beta(1+p-q), \quad \tilde{p} = 0, \quad (24)$$

де \hat{x} позначає оцінку сигнального вектора x за допомогою оптимального детектора з мінімальним СКВ [52].

В кінці кінців, для знаходження вільної енергії F візьмемо похідну від аргументу (23) за u , за умови $u \rightarrow 0^+$. Позначивши $\xi = \tilde{q}$ та $\varepsilon = p - q$ та використавши той факт, що $p = \rho$ як елемент коваріаційної матриці, можна показати, що

$$h(y) = M I(z; x | \sqrt{\rho\xi}) + N \ln(1 + \varepsilon) - M\varepsilon\xi + N(\ln \pi + 1), \quad (25)$$

де $I(z; x | \sqrt{\rho\xi})$ позначає взаємну інформацію між входом і виходом віртуального скалярного каналу зв'язку $z = \sqrt{\rho\xi}x + w$ з $w \sim \text{CN}(0,1)$.

Підставивши (25) в (17), отримуємо швидкість передачі інформації (18), де рівняння в (19) та (20) отримані з (24) після введення відповідних позначень ξ та ε .

Те, що і потрібно було довести.

Для розв'язання системи рівнянь (19) та (20) може бути використаний наступний ітеративний алгоритм. Нехай ξ та ε ініціюються за допомогою певних позитивних (малих або великих) значень $\xi^{(0)}$ та $\varepsilon^{(0)}$. З кожною ітерацією l параметри ξ та ε обчислюються як функції від їх попередніх значень (за ітерації $l-1$), тобто $\xi^{(l)} = f_\xi(\xi^{(l-1)})$ та $\varepsilon^{(l)} = f_\varepsilon(\varepsilon^{(l-1)})$. Процедура повторюється до тих пір, поки абсолютна різниця між значеннями параметрів під час двох послідовних ітерацій не буде менше певного порогового значення. Слід також зазначити, що для гаусівських сигналів даний алгоритм завжди, причому досить швидко, збігається до єдиного рішення. В той же час для негаусівських сигналів (як то QPSK сузір'я) алгоритм збігається набагато повільніше, а також може видавати більше одного рішення в залежності від початкових значень $\xi^{(0)}$ та $\varepsilon^{(0)}$. Даний феномен існування декількох паралельних рішень для (19) та (20) відомий в літературі як *співіснування фаз* [53]. Фізичні аналогії даного явища – це фазовий перехід між льодом та водою та гістерезис феромагнетиків. Таким чином, для розв'язання невизначеності серед набору отриманих рішень потрібно обрати лише ту пару ξ та ε , що мінімізує (18). Даний результат був вперше отриманий в [25] в контексті систем зв'язку CDMA.

Може бути показано, що результат наведеної вище теореми збігається з результатом теореми 1 за умови використання гаусівських сигналів, оскільки тоді взаємна інформація та СКВ мають стандартний вигляд:

$$E_{z,x} \{ \|x - \hat{x}\|^2 \} = (1 + \rho\xi)^{-1},$$

$$I(z; x | \sqrt{\rho\xi}) = \ln(1 + \rho\xi).$$

Для вхідних сигналів x іншого типу взаємна інформація та СКВ можуть бути обчислені за відомими формулами [54]. Так, наприклад, для QPSK-сигналів дані величини мають наступні вирази:

$$E_{z,x} \{ \|x - \hat{x}\|^2 \} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th}(\rho\xi - \sqrt{\rho\xi}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$I(z; x | \sqrt{\rho\xi}) = 2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[\text{ch}(\rho\xi - \sqrt{\rho\xi}z)] e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Слід зазначити, що взаємна інформація між входом та виходом каналу зв'язку та мінімальне СКВ на виході оптимального детектора пов'язані наступним співвідношенням [55]:

$$\mathbf{E}_{z,x} \left\{ \|x - \hat{x}\|^2 \right\} = \frac{\partial I(z; x | \sqrt{\tilde{\rho}})}{\partial \tilde{\rho}},$$

де $\tilde{\rho} = \rho \xi$ позначає С/Ш на виході віртуального каналу $z = \sqrt{\rho \xi} x + w$. Дане співвідношення може бути легко проілюстровано на прикладі двох пар наведених вище виразів.

4. Результати числових симуляцій

В даному розділі ми перевіримо справедливність вищенаведених результатів за допомогою числових симуляцій на основі методу Монте-Карло. Розглянемо некорельований $M \times N$ МІМО канал з релеєвськими завмираннями та АБГШ.

4.1. Точність наближення для МІМО систем реалістичних розмірів

На рис. 2 зображено залежність між пропускною здатністю МІМО каналу з $M=N=4$ та С/Ш; а саме, о-маркери позначають значення пропускної здатності, отримані за допомогою симуляцій (4), в той час як суцільна лінія та х-маркери позначають значення, отримані за допомогою (9) та (18) відповідно.

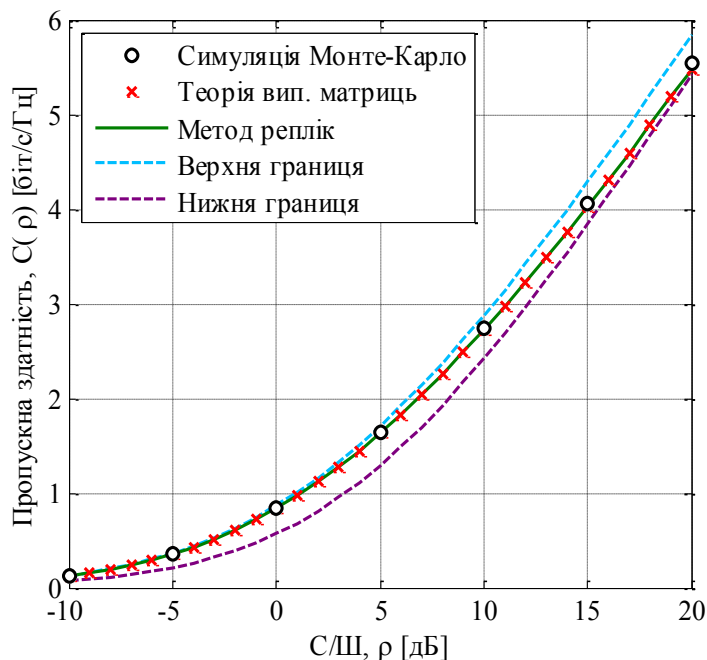


Рис. 2. Залежність ергодичної пропускної здатності каналу від С/Ш для 4×4 МІМО каналу

Для порівняння ми також зобразимо верхню та нижню границі (5) та (6) відповідно. З рис. 2 можна бачити, що асимптотичні рішення добре описують реальну поведінку ергодичної пропускної здатності. Більш того, невелике (майже непомітне) розходження між теоретичними та практичними значеннями якраз пояснюється тим фактом, що для симульованої системи $M, N \rightarrow \infty$. Також ми бачимо, що обидва рішення, розглянуті в розділах 2 та 3, співпадають. З рис. 2 також видно, що отримана апроксимація служить кращою оцінкою реальної пропускної здатності, ніж верхня (5) та нижня (6) границі в усьому діапазоні С/Ш.

4.2. Збіжність наближеного рішення

Дослідимо тепер збіжність виведеної апроксимації до реальної пропускної здатності. На рис. 3 показано поведінку асимптотичних наближень в залежності від кількості антен M для С/Ш $\rho = 10$ дБ. Ми бачимо, що зі збільшенням реальної кількості антен МІМО системи її поведінка стає все більш передбачуваною за допомогою наведених вище результатів. Так, вже для $M = N = 6$ похибка майже непомітна. Крім того, обидва рішення, розглянуті в попередніх розділах, повністю співпадають для гаусівських сигналів.

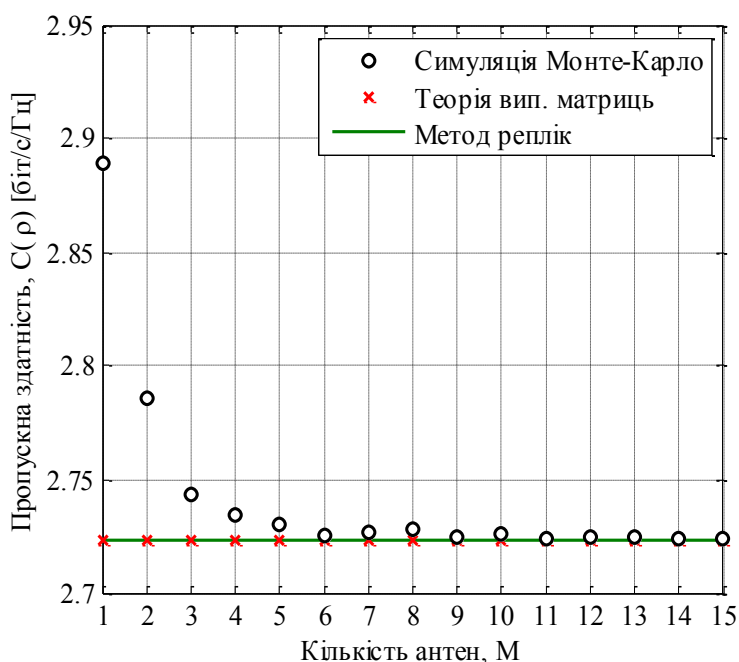


Рис. 3. Залежність ергодичної пропускної здатності каналу від кількості антен для $M \times M$ МІМО каналу

4.3. Точність наближення для дискретних сигнальних сузір'я

Для того щоб мотивувати використання методу реплік (який не є строго обґрунтованим), розглянемо MIMO систему, що використовує QPSK сигнали. На рис. 4 побудовано залежність взаємної інформації (2) для такої системи від С/Ш. Відповідний асимптотичний результат (позначений суцільною лінією) отримано за допомогою методу реплік в (18). Маркери відображають результати симулювання (17) за допомогою методу Монте-Карло. Для порівняння також побудовано залежність вищезгаданої пропускну здатності (гаусівські сигнали) від С/Ш. З рисунку видно, що асимптотичне рішення (18) в певному наближенні описує поведінку реальної системи з $M = N = 2, 4, 6$. Крім того, зі збільшенням кількості антен наближення стає все більш точним. Також видно, що для низьких значень С/Ш передача QPSK сигналів має такі ж самі показники, як і оптимальна передача з гаусівськими сигналами. В той же час, для великих значень С/Ш (більше 10 дБ) взаємна інформація для QPSK сигналів обмежена зверху величиною 2 біт/с/Гц на антену.

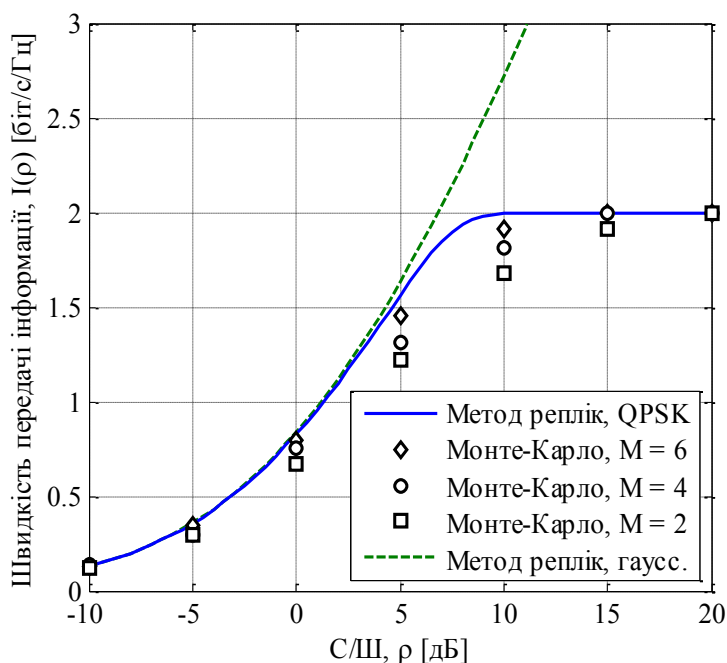


Рис. 4. Залежність ергодичної швидкості передачі інформації з QPSK модуляцією $M \times M$ MIMO каналом з $M = 2, 4, 6$ від С/Ш

Висновки

В даній роботі зроблено огляд сучасних аналітичних методів, що базуються на теорії випадкових матриць та на методі реплік зі статистичної фізики, для аналізу лінійних векторних каналів з завмираннями на прикладі MIMO системи зв'язку. Використані методи припускають, що кількість входів та виходів каналу зв'язку дуже

велика i , таким чином, канална матриця може бути змодельована випадковою матрицею нескінченних розмірів з фіксованим відношенням кількості стовпців до кількості рядків. Отримано явний вираз для ергодичної пропускну здатності MIMO-каналу з завмираннями, а також для швидкості передачі інформації для будь-яких вхідних сигналів. Результати симулювання на основі методу Монте-Карло підтверджують справедливості наведених результатів. Подальші дослідження можуть включати ускладнення моделі каналних завмирань для більш реалістичного моделювання, наявності завад від інших передавачів, зворотній зв'язок, тощо.

Список літератури:

1. Foschini G. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas // Bell labs Technical Journal. – 1996. – Vol. 1, No 2. – P. 41-59.
2. Telatar E., Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels // European Transactions on Telecommunications. – 1999. – Vol. 10, No 6. – P. 585-595.
3. Слюсар В. Системи MIMO: Принципи побудови і обробка сигналів // Електроніка: наука, технологія, бізнес. – 2005. – Вып. 8. – С. 52-58.
4. Банкет В. Л., Токарь М.С. MIMO – новая технология многоантенной радиосвязи для систем беспроводного доступа // Зв'язок. – 2010. – Вып. 3. – С. 6-12.
5. Gesbert D. From Theory to Practice: An Overview of MIMO Space-Time Coded Wireless Systems // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2003. - Vol. 21, No 3. – P. 281-302.
6. Larsson E. G., Tufvesson F., Edfors O., Marzetta T. L. Massive MIMO for Next Generation Wireless Systems // IEEE Communications Magazine. – 2013. – Vol. 52, No 2. – P. 186-195.
7. 3GPP Further advancements for E-UTRA: LTE-Advanced feasibility studies in RAN WG4 // 3GPP TR 36.815. – 2010. – 29p.
8. Lindmark B. Capacity of a 2x2 MIMO antenna system with mutual coupling losses // Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – 2004. – P. 1720-1723.
9. Marzetta T. Noncooperative Cellular Wireless with Infinite Number of Base Stations // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2010. – Vol. 9, No 11. – P. 3590-3600.
10. Hoydis J., Hoek C., Wild T., ten Brink S. Channel Measurements for Large Antenna Arrays // Proceedings of International Symposium on Wireless Communication Systems, – Paris, France, 2012. – P. 811-815.
11. Rusek F., Persson D., Lau B. K., Larsson E. G., Marzetta T. L., Edfors O., Tufvesson F. Scaling up MIMO: Opportunities and Challenges with Very Large Arrays // IEEE Signal Processing Magazine. – 2013. - Vol. 30, No 1. – P. 40-60.
12. Sheldon C., Torkildson E., Seo M., Yue C. P., Madhow U., Rodwell M. A 60GHz line-of-sight 2x2 MIMO link operating at 1.2 Gbps // Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, San Diego, U.S.A., 2008. – P. 1-4.
13. Wigner E.P. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices // Annals of mathematics – 1958. - Vol. 67, No 2. – P. 325-327.
14. Марченко В. А., Пастур Л. А. Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц // Математический сборник. – 1967. – Т. 72, № 4. – С. 507-536.

15. Гирко В. Л. Спектральная теория случайных матриц // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 67-106.
16. Grant A., Alexander P.D. Random sequence multisets for synchronous code-division multiple-access channels // IEEE Transactions on Information Theory. – 1998. – Vol. 44, No 7. – P. 2832–2836.
17. Verdú S., Shamai S. Spectral efficiency of CDMA with random spreading // IEEE Transactions on Information Theory. – 1999. – Vol. 45, No 2. – P. 622–640.
18. Lozano A., Tulino A. M., Verdú S. Capacity of multiple-transmit multiple-receive antenna architectures // IEEE Transactions on Information Theory. – 2002. – Vol. 48, No 12. – P. 3117–3128.
19. Tulino A. M., Verdú S. Random matrix theory and wireless communications, Now Publishers Inc. – 2004. – 182 p.
20. Couillet R., Debbah M. Random matrix theory and applications to wireless communications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 539 p.
21. Кас М. On the structure of Toeplitz like matrices // Den fysiske seminar i Trondheim – Trondheim, Norway, 1968. – P. 1–21 .
22. Edwards S.F., Anderson P. W. Theory of spin glasses // Journal of Physics F: Metal Physics. – 1975. – Vol. 5, No 5. – P. 965–974.
23. Доценко В. С. Физика спин-стекольного состояния // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, № 6. – С. 1-37.
24. Sourlas N. Spin-glass models as error-correcting codes // Nature. – 1989. – Vol. 339, No 6227. – P. 693–695.
25. Tanaka T. A statistical-mechanics approach to large-system analysis of CDMA multiuser detectors // IEEE Transactions on Information Theory. – 2002. – Vol. 48, No 11. – P. 2888-2910.
26. Guo D., Verdú S. Randomly spread CDMA: Asymptotics via statistical physics // IEEE Transactions on Information Theory. – 2005. – Vol. 51, No 6. – P. 1983–2010.
27. Müller R. Channel capacity and minimum probability of error in large dual antenna array systems with binary modulation // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2003. – Vol. 51, No 11. – P. 2821–2828.
28. Wen C.-K., Wong K.-K. Asymptotic analysis of spatially correlated MIMO multiple-access channels with arbitrary signaling inputs for joint and separate decoding // IEEE Transactions on Information Theory. – 2003. – Vol. 53, No 1. – P. 252-268.
29. Moustakas A. L., Simon S. H., Sengupta A. M. MIMO capacity through correlated channels in the presence of correlated interferers and noise: A (not so) large N analysis // IEEE Transactions on Information Theory. – 2003. – Vol. 49, No 10. – P. 2545-2561.
30. Girnyk M. A., Vehkaperä M., Rasmussen L. K. Large-system analysis of MIMO MAC in the presence of interference for arbitrary signaling // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2013. – Vol. 13, No 4. – P. 2060–2073.
31. Wen C.-K., Jin S., Wong K.-K. On the sum-rate of multiuser MIMO uplink channels with jointly-correlated Rician fading // IEEE Transactions on Communications. – 2011. – Vol. 59, No 10. – P. 2883-2895.
32. Taricco G., Riegler E. On the ergodic capacity of correlated Rician fading MIMO channels with interference // IEEE Transactions on Information Theory. – 2011. – Vol. 57, No 7. – P. 4123-4137.
33. Müller R. Random matrices, free probability and the replica method // Proceedings of European Signal Processing Conference. – Vienna, Austria, 2004. – P. 189-196.

34. *Girnyk M.* A statistical-physics approach to the analysis of wireless communication systems. Ph.D. dissertation, KTH Royal Institute of technology, Stockholm, Sweden, 2014. – 232 p.
35. *Прокис Дж.* Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
36. *Cover T. M., Thomas J. A.* Elements of information theory. – John Wiley & Sons, 2012. – 542 p.
37. *Tse D., Viswanath P.* Fundamentals of wireless communication. – Cambridge university press, 2005. – 564 p.
38. *Соболь И. М.* Метод Монте-Карло. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 80 с.
39. *Оутан О., Nabar R. U., Bölcke H., Paulraj A. J.,* Characterizing the statistical properties of mutual information in MIMO channels // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2003. – Vol. 51, No 11. – P. 2784-2795.
40. *Grant A.,* Rayleigh fading multi-antenna channels // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. – 2002. – Vol. 2002, No 1. – P. 316–329.
41. *Szegö G.* Orthogonal polynomials. New York, U.S.A.: American Mathematical Society. – 1959. – Vol. 23.
42. *Капаева Т. Ф., Лимарев А. Е., Максютя Ю. Н., Маркин В. Г., Поветко В. Н. Смагина М. В.* Пропускная способность ММО-систем в каналах с замираниями – Часть 1. Релеевские замирания // Теория и техника радиосвязи. – 2012. – Вып. 2. – С. 11-24.
43. *Цыбаков Б. С.* О модели и пропускной способности ММО-каналов // Проблемы передачи информации. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 7-16.
44. *Akhiezer N. I.* The classical moment problem and some related questions in analysis // Edinburgh: Oliver & Boyd, 1965. – 253 p.
45. *Шеннон К. Э.* Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике / Пер. С. Карпова. – М., ИИЛ, 1963. – 830 с.
46. *Korada, S. B., Macris N.* Tight bounds on the capacity of binary input random CDMA systems // IEEE Transactions on Information Theory. – 2010. – Vol. 56, No 11. – P. 5590–5613.
47. *Hachem W., Khorunzhy O., Loubaton P., Najim J., Pastur L. A.* A new approach for mutual information analysis of large dimensional multi-antenna channels // IEEE Transactions on Information Theory. – 2008. – Vol. 54, No 9. – P. 3987–4004.
48. *Tanaka T.* Moment problem in replica method // Interdisciplinary Information Sciences. – 2007. – Vol. 13, No 1. – P. 17–23.
49. *Зинн-Жюстен Ж.* Континуальный интеграл в квантовой механике. – М.: Физматлит, 2006. – 355 с.
50. *Ellis R.* Entropy, large deviations, and statistical mechanics, Taylor & Francis US, 2005. – 369 p.
51. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
52. *Пенин П. И., Филиппов Л. И.* Радиотехнические системы передачи информации: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1984. – 256 с.
53. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем: Термодинамика. – М.: УРСС, 2002. – 240 с.
54. *Lozano A., Tulino M., Verdú S.* Optimum power allocation for parallel Gaussian channels with arbitrary input distributions // IEEE Transactions on Information Theory. – 2006. - Vol. 52, No 7. – P. 3033-3051.
55. *Guo D., Shamai S., Verdú S.* Mutual information and minimum mean-square error in Gaussian channels // IEEE Transactions on Information Theory. – 2005. – Vol. 51, No 4. – P. 1261-1282.