УДК 621.391

ТРИВАЛІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ВСТАНОВЛЕННІ СИНХРОНІЗАЦІЇ ХАОТИЧНИХ СИСТЕМ В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЯХ

С.Д. Галюк, Л.Ф. Політанський
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Abstract *– This paper are devoted to the analysis of the transient time for unidirectional synchronization of logistic equations and Lorenz systems in telecommunication systems using the chaos. We investigate the relationship between duration transient process, error of synchronization and initial conditions by means of numerical simulation. In theory, chaos synchronization occurs if the time differences between the two state variables tend to zero. For physical systems, this criterion is not applicable because the measuring instruments have limited resolution, measurement time is also limited and chaotic generators are not strictly identical. In practice, the chaos synchronization occurs if the difference between their state variables with time is less than a given level. Using this criterion we demonstrate, that for a given acceptable level of synchronization error exists a range of parameter mismatch in which the duration of transients does not depend on the value of mismatch. The problem of initial conditions is also investigated. If the initial conditions of the driven system is fixed, and the initial conditions of the driving system is limited to a small range then full synchronization is set in fixed intervals, and the distribution of time of synchronization is multimodal. In addition, the average time is reduced compared to the case when the initial condition of both systems is random.*

Анотація *– На прикладі односпрямовано з'єднаних логістичних рівнянь та систем Лоренца вивчається тривалість перехідних процесів при встановленні повної синхронізації хаотичних систем в телекомунікаціях. Показано, що розподіл часу, необхідного для встановлення синхронізації, залежить від початкових умов систем, що взаємодіють.*

Аннотация *– На примере однонаправленно соединенных логистических уравнений и систем Лоренца изучается продолжительность переходных процессов при установлении полной синхронизации хаотических систем в телекоммуникациях. Показано, что распределение времени, необходимого для установления синхронизации, зависит от начальных условий взаимодействующих систем.*

Вступ

Побудова нових телекомунікаційних систем, що дають змогу забезпечити високу завадостійкість, велику інформаційну ємність і високий рівень конфіденційності є актуальним питанням наукових досліджень. Для вирішення цих задач можна використовувати псевдовипадкові послідовності, наприклад, стандарт стільникового зв'язку CDMA. Проблемою таких систем є обмежена кількість придатних для використання псевдовипадкових послідовностей. Альтернативним і відносно новим напрямом побудови широкосмугових систем є використання хаотичних сигналів та явища синхронізації хаосу [1-4].

Хаотичними сигналами називають складні неперіодичні коливання, що породжуються нелінійними динамічними системами. Характер цих коливань визначається властивостями, притаманними випадковим процесам, проте реалізація "хаотичного процесу" повністю задається параметрами та початковими умовами детермінованої системи. Природну широкосмуговість хаотичних сигналів запропоновано використо-

вувати як для розширення спектра в прямохаотичних системах [5, 6], так і в системах передавання цифрової інформації за допомогою синхронізації хаосу. Розрізняють декілька видів синхронізації хаосу, зокрема, повну, узагальнену, фазову синхронізацію, синхронізацію із затримкою та випередженням, що суттєво відрізняються між собою [7-10]. Надалі розглядатимемо повну синхронізацію, ознакою встановлення якої є ідентичність станів систем, що з'єднані між собою. Відновлення інформації для систем зв'язку, що базуються на використанні повної синхронізації хаосу, таких як перемикання хаотичних режимів, маскування та нелінійне підмішування, ґрунтується на виявленні факту встановлення або невстановлення синхронного режиму роботи генераторів хаотичних коливань передавальної та приймальної сторін.

Надійність та швидкодія систем передавання інформації обмежується впливом шумів і завад в каналі зв'язку, а також тривалістю перехідних процесів, що мають місце в роботі апаратних засобів приймальної та передавальної сторін. На забезпечення режиму синхронізації генераторів хаосу приймальної та передавальної сторін суттєво впливає ступінь розлаштування їх параметрів.

Встановленню режиму синхронної роботи генераторів хаосу передавальної та приймальної сторін притаманний перехідний процес, на протязі якого відбувається затухання власних коливань веденої системи та налаштування її стану на стан ведучої системи. Теоретично синхронізація має місце, якщо з часом різниця між станами двох систем, що взаємодіють, прямує до нуля:

$$\lim_{t\to 0}\left[y_1(t)-y_2(t)\right]=0, \qquad (1)$$

де $y_1(t)$, $y_2(t)$ – вектори стану ведучої та веденої систем. Виконання умови (1) можливе тільки при ідентичності параметрів генераторів передавальної та приймальної сторін.

При відсутності ідентичності параметрів генераторів вважають, що має місце встановлення синхронізації між системами, якщо різниця між їх станами з часом залишається меншою заданого рівня ε:

$$\left|y_1(t)-y_2(t)\right|\le\varepsilon, при\ t\ge t_0, \qquad (2)$$

де t_0 – час встановлення синхронізації.

Різниця в (2) є випадковим сигналом з середнім значенням, що дорівнює нулю.

Час встановлення синхронізації хаосу залежить від значення старшого умовного показника Ляпунова веденої системи [8]. Збільшення коефіцієнта зв'язку призводить до зменшення старшого умовного показника та зменшення середнього часу, необхідного для встановлення синхронізації. В залежності від початкових умов та виду стабільності множини синхронізації час її встановлення буде різним [9, 10]. Невирішеним залишається питання про можливість керування тривалістю перехідного процесу за допомогою задання початкових умов хаотичних систем.

Як зазначалося, встановлення повної синхронізації вимагає ідентичності параметрів хаотичних систем на приймальній та передавальній сторонах, оскільки роз-

лаштування параметрів систем призводить до обмеження значення похибки синхронізації знизу, що може негативно вплинути на тривалість перехідного процесу у веденій системі.

Метою роботи є дослідження впливу початкових умов та ступеня розлаштування параметрів хаотичних систем на процеси встановлення їх синхронізації.

I. Синхронізація дискретних хаотичних систем

Хаотичні системи за типом генерованого сигналу поділяються на дискретні та неперервні (потокові). Розглянемо синхронізацію дискретних хаотичних систем на прикладі односпрямовано з'єднаних логістичних рівнянь:

$$x(n+1) = r_d x(n)(1-x(n)), \tag{3}$$

$$y(n+1) = (1-e)r_d y(n)(1-y(n)) + ex(n+1), \tag{4}$$

де r_d, r_r – параметри керування, e – коефіцієнт зв'язку, n – номер ітерації, $x(\cdot), y(\cdot)$ – безрозмірні змінні стану систем.

Значення коефіцієнта зв'язку e визначає рівень впливу ведучої системи на ведену. Виконання умови синхронізації (1) і (2) можливе при від'ємному значенні умовного показника Ляпунова веденої системи λ [3]. При $r_d = r_r = 3{,}76$ логістичне рівняння характеризується хаотичною поведінкою. Залежність умовного показника Ляпунова λ від коефіцієнта зв'язку e наведено на рис. 1. Для проведення досліджень виберемо значення коефіцієнта зв'язку $e = 0{,}5$.

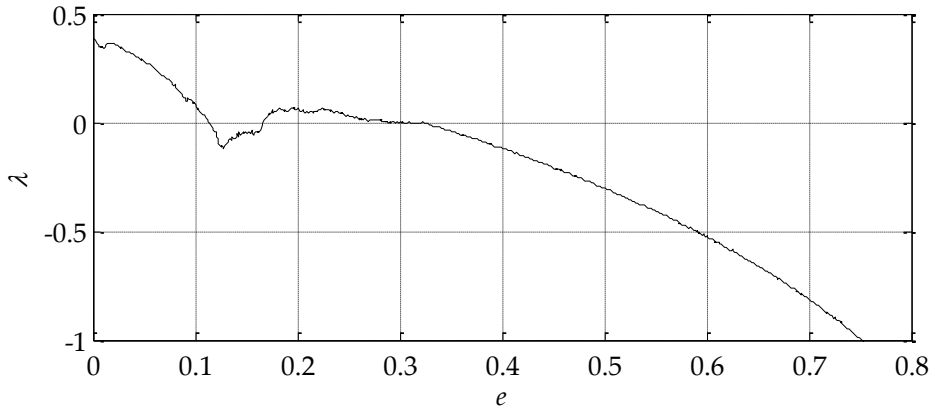

Рис. 1. Залежність умовного показника Ляпунова від коефіцієнта зв'язку e при значеннях $r_d = r_r = 3{,}76$

Вважатимемо, що синхронізація встановлена за n_c ітерацій відображень (3) і (4), якщо $|x(n) - y(n)| < 0{,}001$ при $n > n_c$.

При моделюванні використовувалося 10^7 реалізацій хаотичних сигналів систем (3) і (4) довжиною 200 ітерацій з випадковими початковими умовами, що належать атракторам систем.

Розподіл ймовірності синхронізації логістичних рівнянь по кількості ітерацій наведено на рис. 2. Із отриманих результатів моделювання випливає, що необхідна кількість ітерацій для встановлення синхронізації, має випадковий характер. Середня тривалість перехідного процесу становить $< n >= 16{,}87$ ітерацій.

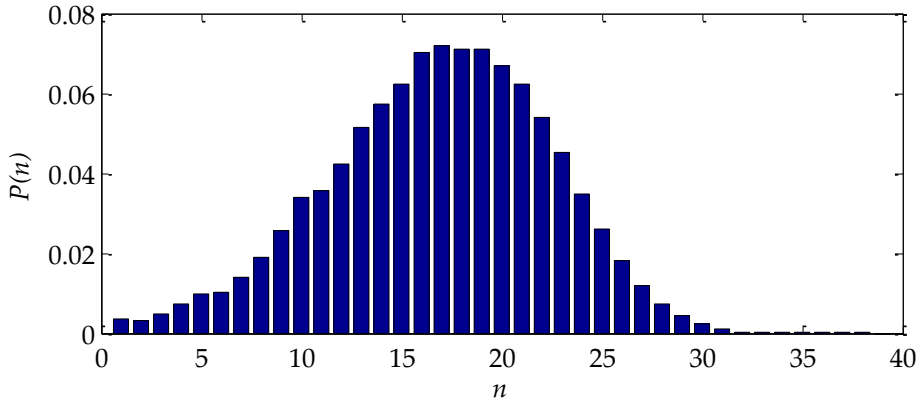

Рис. 2. Розподіл ймовірності синхронізації логістичних рівнянь по кількості ітерацій n за умови, що початкові умови ведучої і веденої систем є випадковими, а значення параметрів керування $r_d = r_r = 3{,}76$. $P(n)$ – ймовірність встановлення синхронізації за n ітерацій

Наближено середню тривалість перехідних процесів можна розрахувати з використанням старшого умовного показника Ляпунова λ_c. Якщо $\lambda < \lambda_c$, то відстань між системами (3) і (4) зменшується експоненційно $\Delta x(n) = x(n) - y(n) = \Delta x_0 e^{\lambda n}$, тоді

$$< n >= \frac{1}{\lambda_c}\left(\mathbf{ln}(\Delta x(n)) - < \mathbf{ln}(\Delta x_0) >\right). \qquad (5)$$

При $e = 0{,}5$ значення умовного показника Ляпунова дорівнює $\lambda = -0{,}302$ (рис. 1). Розраховане згідно з (5) значення похибки синхронізації $\Delta x(n)$ не буде перевищувати $\Delta x(n) = \varepsilon = 0{,}001$ при кількості ітерацій, більшій ніж 16,85, що практично співпадає з результатом моделювання.

Для ідентичних систем похибка синхронізації експоненційно зменшується зі зростанням n. У випадку неідентичності параметрів ведучої і веденої систем практичним критерієм встановлення повної синхронізації є значення похибки синхронізації. Тривалість перехідного процесу буде визначатися в першу чергу заданим дозволеним рівнем похибки синхронізації при умові, що старший умовний показник Ляпунова веденої системи від'ємний. Із отриманих результатів моделювання (рис. 3) випливає, що у випадку неідентичних систем при $r_r = 3{,}764$ максимальне значення похибки синхронізації не залежить від кількості ітерацій при $n > 40$. Якщо вважати критерієм встановлення синхронізації значення похибки синхронізації менше за $e = 0{,}001$, то тривалість перехідних процесів не перевищуватиме $n = 40$ ітерацій для довільних початкових умов. Аналогічний результат отримаємо при збільшенні розлаштування па-

раметрів. Якщо $r_r = 3{,}769$, то максимальне значення похибки синхронізації обмежене знизу величиною $e = 0{,}002$ при $n > 45$ ітерацій.

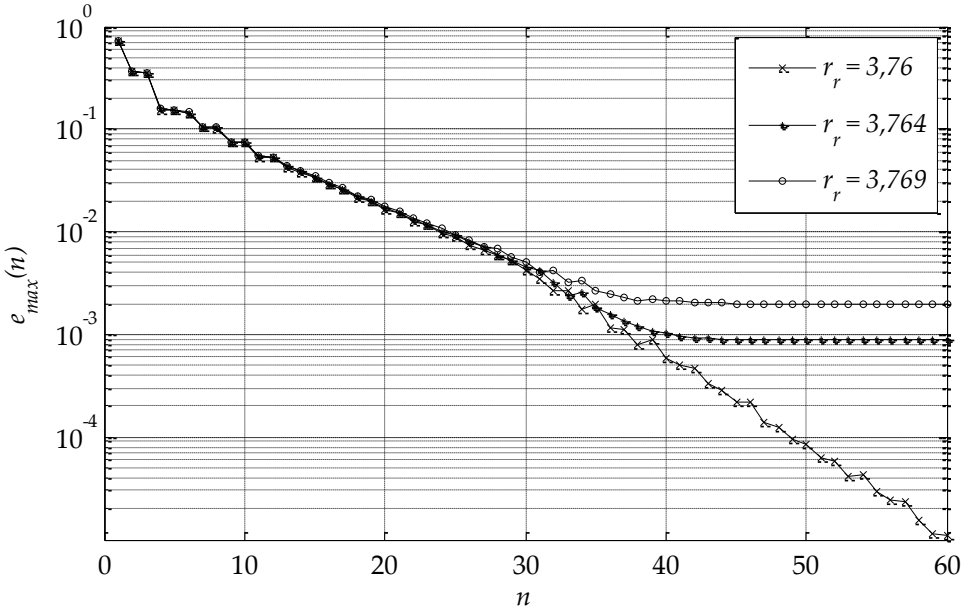

Рис. 3. Залежність максимального значення похибки синхронізації $e_{\max}(n)$ від кількості ітерацій n при різних значеннях параметра керування веденої системи та кількості реалізацій хаотичного процесу 10^7

Неідентичність систем зумовлює зростання середнього часу встановлення синхронізації в порівнянні з ідентичними системами (рис. 4).

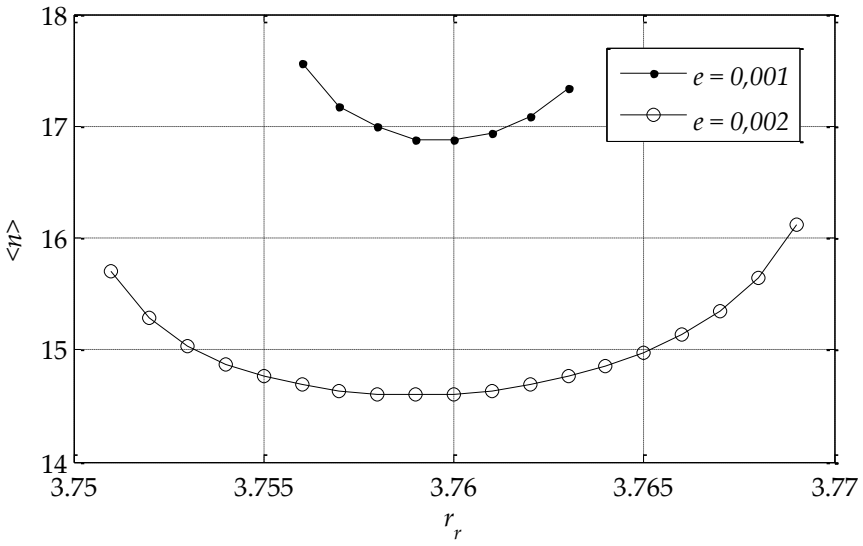

Рис. 4. Залежність середнього часу перехідних процесів від розлаштування параметрів систем та порогу синхронізації

Зі збільшенням розлаштування тривалість перехідного процесу незначно зростає, а розподіл ймовірності синхронізації практично не змінюється (рис. 5). На рис. 5 $P(n)$ – ймовірність встановлення синхронізації за n ітерацій. Дисперсія часу встанов-

лення синхронізації для ідентичних систем становитиме $\sigma^2 = 29{,}93$, а для неідентичних – $\sigma^2 = 32{,}67$ при значенні параметру $r_r = 3{,}764$.

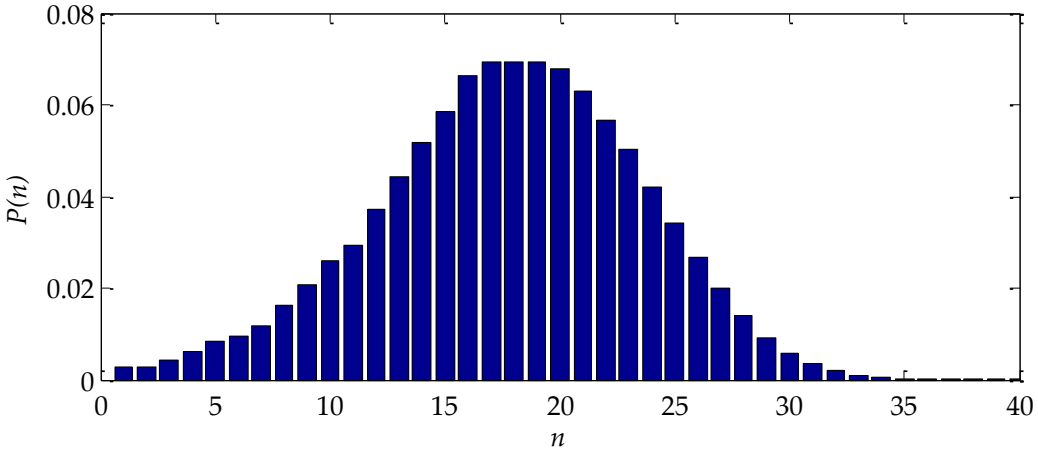

Рис. 5. Розподіл ймовірності синхронізації логістичних рівнянь по кількості ітерацій n для неідентичних систем за умови, що початкові умови ведучої і веденої систем є випадковими при $r_d = 3{,}76$, $r_r = 3{,}764$

Синхронізація не встановлюється, якщо похибка синхронізації не може бути меншою заданого рівня. Підвищуючи пороговий рівень ε, можна збільшити величину розлаштування параметрів, за якого синхронізація зможе встановитися.

II. Синхронізація неперервних хаотичних систем

На відміну від дискретних систем у неперервних хаотичних системах неможливе встановлення синхронізації у фіксовані моменти часу. Густина розподілу часу, необхідного для встановлення синхронізації неперервних систем, буде неперервною. Розглянемо процес синхронізації систем Лоренца [11]. Односпрямовано з'єднані системи описуються наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1); \\ \dot{y}_1 = r x_1 - y_1 - x_1 z_1; \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - b z_1; \\ \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2); \\ \dot{y}_2 = r x_2 - y_2 - x_2 z_2 + e(y_1 - y_2); \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2, \end{cases} \tag{6}$$

де $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ - параметри системи, e – коефіцієнт зв'язку, x_1, y_1, z_1 – безрозмірні змінні стану ведучої системи, x_2, y_2, z_2 – безрозмірні змінні стану веденої системи.

Критичне значення коефіцієнта зв'язку, за якого старший умовний показник Ляпунова веденої системи набуває від'ємного значення, дорівнює $e \approx 3{,}76$. Синхронізація вважалася встановленою, якщо виконувалася умова (2) для змінних $x_1 = x_1(t)$ і

$x_2 = x_2(t)$ системи (6) при $\varepsilon = 0{,}001$. Розподіл часу встановлення синхронізації для 10^6 початкових умов з інтервалом $0{,}01$ с наведено на рис. 6. Початкові умови ведучої і веденої систем вибиралися з врахуванням ймовірності їх появи на атракторі. З рис. 6 випливає, що розподіл є унімодальним і несиметричним з додатньою асиметрією $A = 0{,}9$. Середній час встановлення синхронізації $t_c = 13{,}38\ c$, дисперсія $\sigma^2 = 22{,}32\ c^2$. Перехідний процес тривав довше, ніж $t_c + 3\sigma$ тільки у 1,05% випадків.

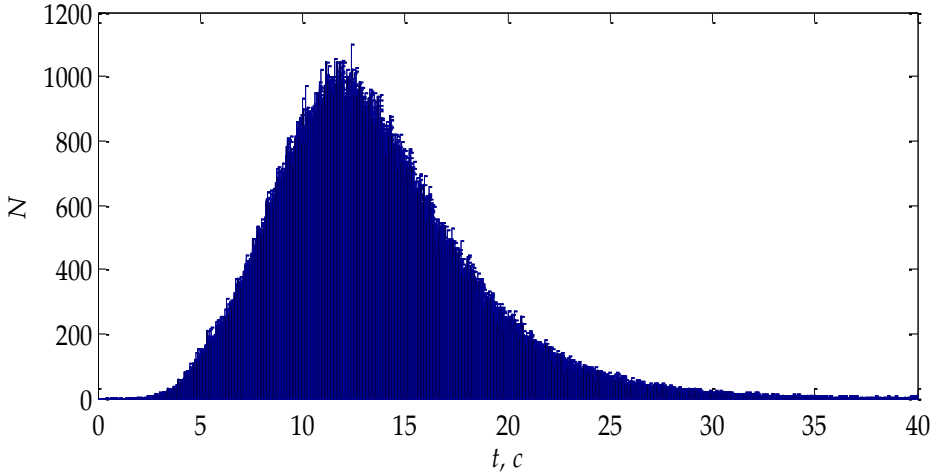

Рис. 6. Розподіл часу встановлення синхронізації для систем Лоренца при $e = 5$. Початкові умови ведучої і веденої систем випадкові і знаходяться на атракторі

Виявлено, що характер розподілу часу встановлення синхронізації визначається початковими умовами веденої системи у випадку, якщо вони є постійними або обмеженими у своєму значенні. При $\{x_{02}, y_{02}, z_{02}\} = \{6{,}4173, -4{,}7903, 60{,}5257\}$ розподіл стає мультимодальним (рис. 7). Середній час встановлення синхронізації зменшується в порівнянні з попереднім випадком до $t_c = 15{,}5\ c$, але значення його дисперсії зростає до $\sigma^2 = 25{,}2\ c^2$.

У випадку цифрової системи існує можливість точно задавати початкові умови хаотичної системи. За незмінних початкових умов (не включаючи однакові для ведучої і веденої систем) очевидно, що для систем з дискретним часом тривалість перехідного процесу буде постійною величиною.

Для неперервної хаотичної системи задати точно початкові умови в принципі неможливо, що зумовлено обмеженою точністю приладів та наявністю шумових флуктуацій. На рис. 8 наведено результати моделювання синхронізації систем (6) при фіксованих початкових умовах веденої системи $\{x_{02}, y_{02}, z_{02}\} = \{6{,}4173, -4{,}7903, 60{,}5257\}$ та обмежених початкових умовах ведучої системи $\{x_{01}, y_{01}, z_{01}\} = \{6{,}4173, -4{,}7903, 60{,}5257\} \pm 0{,}0025$.

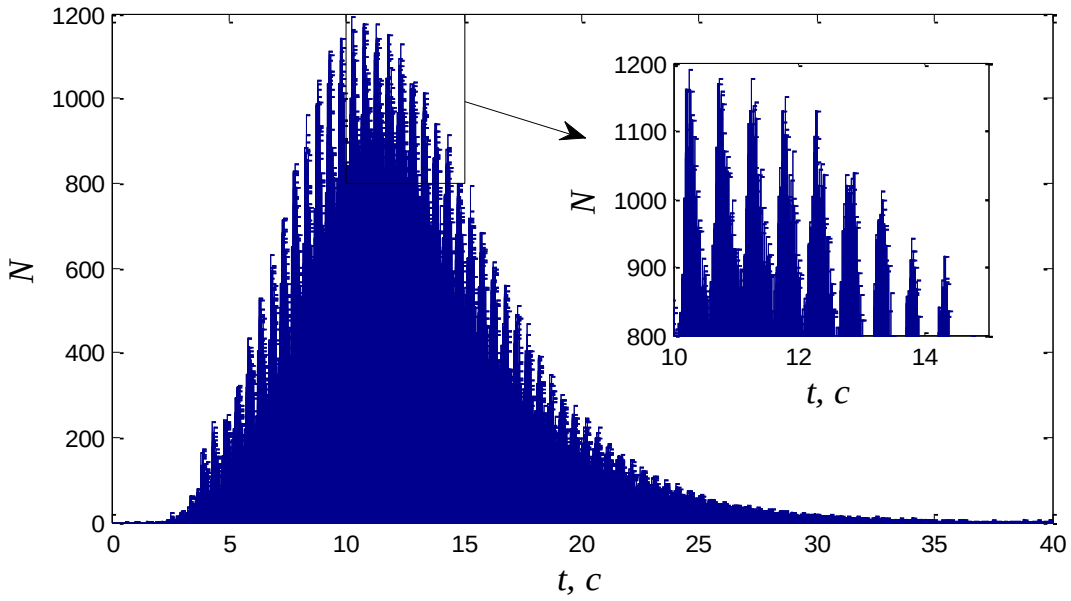

Рис. 7. Розподіл часу встановлення синхронізації для систем Лоренца при $e = 5$. Початкові умови ведучої системи – випадкові, веденої – фіксовані

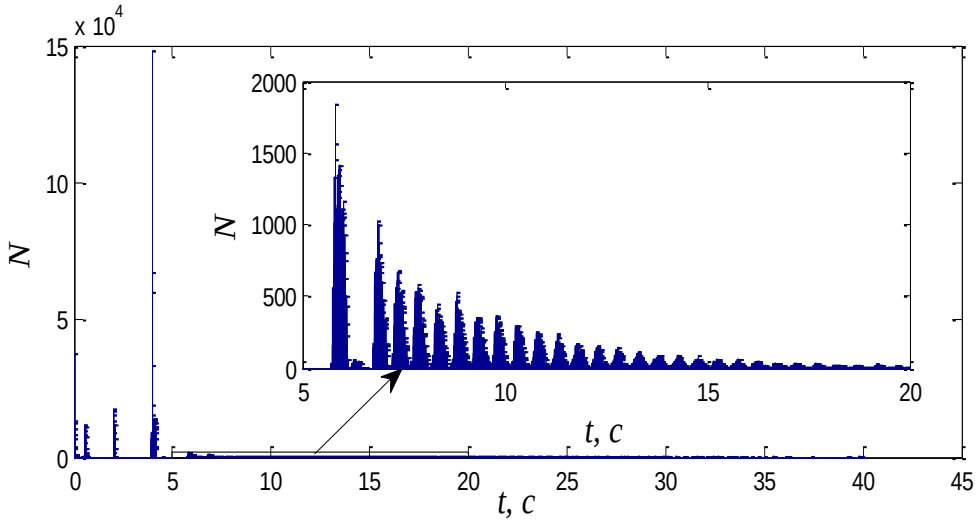

Рис. 8. Розподіл часу встановлення синхронізації для систем Лоренца при $e = 5$. Початкові умови ведучої системи задані з обмеженою точністю, веденої – фіксовані

Незважаючи на те, що відхилення в початкових умовах ведучої і веденої систем було порівняне з критерієм встановлення синхронізації $\varepsilon = 0{,}001$, тільки у 3,8% випадків вдалося синхронізувати роботу систем заданням початкових умов. Проте в інтервалі часу $t \in [3{,}8;\ 4{,}2]$ синхронізація встановилася для 56,99% початкових умов (рис. 8). Середній час встановлення синхронізації $t_c = 3{,}96\ c$, дисперсія $\sigma^2 = 8{,}34\ c^2$. Ймовірність невстановлення синхронізації за час $t \le t_c + 3\sigma = 12{,}62\ c$ дорівнює 0,0187. З рис. 8 випливає, що існують діапазони значення часу при $t < 12{,}62\ c$, в яких ймовірність встановлення синхронізації дорівнює нулю. В порівнянні з синхронізацією за

випадкових початкових умов зменшення середнього часу встановлення синхронізації становить $\frac{13{,}38}{3{,}96} \approx 3{,}4$ рази. Отже, задання початкових умов системи (6) з обмеженою точністю зумовлює ускладнення розподілу часу встановлення синхронізації та зменшення середнього часу її встановлення.

Зазначимо, що умова (2) може не виконуватися у випадку синхронізації неідентичних систем, для яких характерне on-off перемішування [2]. Короткочасні зриви синхронізації можуть зумовити виникнення похибки синхронізації з амплітудою, що порівняна з амплітудою хаотичного сигналу. У цьому випадку практичним критерієм встановлення синхронізації може слугувати значення середньоквадратичного відхилення похибки синхронізації на фіксованому інтервалі часу.

Числовим моделюванням системи (6) з випадковими початковими умовами знайдено точки на траєкторіях, при проходженні через які починає виконуватися умова (2). Точки, в яких встановлюється синхронізація, розподілені на атракторі нерівномірно (рис. 9). Це означає, що у фазовому просторі хаотичних систем існує область, при потраплянні в яку між траєкторіями ведучої і веденої систем може встановитися синхронізація.

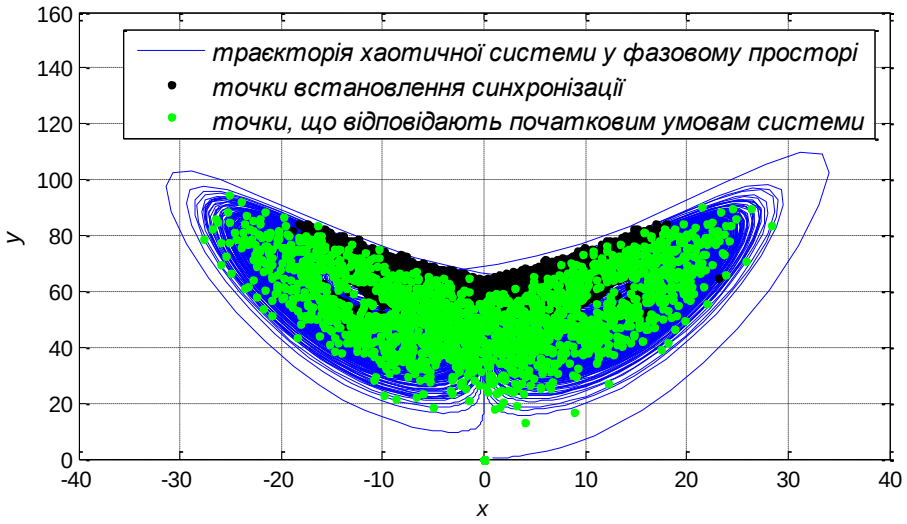

Рис. 9. Хаотичний атрактор Лоренца

Якщо синхронізація не встигла встановитися, тоді траєкторії систем далі еволюціонуватимуть на атракторі, поки знову не потраплять в область синхронізації. Хаотичні коливання, породжені системою Лоренца, мають вигляд квазіперіодичних (спектр сигналу характеризується чітко вираженою середньою частотою коливань), тому траєкторії системи потраплятимуть в область синхронізації з певною періодичністю, що пояснює мультимодальність розподілу часу встановлення синхронізації.

Висновки

Тривалість перехідного процесу при синхронізації хаотичних систем за фіксованого значення коефіцієнта зв'язку визначається початковими умовами та ступенем

розлаштування параметрів систем. Заданням початкових умов можна керувати середнім часом встановлення синхронізації. Основні результати, отримані авторами в результаті проведених досліджень, є наступними:

1. Вперше встановлено, що при заданому допустимому рівні похибки синхронізації існує діапазон розлаштування параметрів систем, в якому тривалість перехідних процесів практично не залежить від його величини.

2. Вперше встановлено, що за постійних початкових умов веденої системи та заданні початкових умов ведучої системи із околу фіксованих значень повна синхронізація встановлюється у фіксовані проміжки часу, при цьому середній час, необхідний для встановлення синхронізації, зменшується у 3,4 рази.

Результати роботи можуть мати застосування при розробці телекомунікаційних систем, що використовують синхронізацію хаотичних коливань для відновлення інформаційного сигналу. Наприклад, швидкість передавання інформації для систем з перемиканням хаотичних режимів обмежується тривалістю перехідних процесів при встановленні синхронізації. Задання початкових умов при формуванні хаотичних радіоімпульсів в таких системах дасть змогу суттєво підвищити їх ефективність.

Список літератури:

1. Chaos applications in telecommunications / Edited by *Peter Stavroulakis* // CRC Press Professional, 2005. – 440 p.

2. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем святи. – М.: Издательство Физико–математической литературы, 2002. – 252 с.

3. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, №12. – С. 1281-1310.

4. *Дмитриев А.Ю., Кузьмин Л.В.* Прием хаотических сигналов с использованием опорного генератора хаоса // Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №1. – С. 1-11.

5. *Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Максимов Н.А., Панас А.И., Старков С.О.* Перспективы создания прямохаотических систем связи в радио- и СВЧ-диапазонах // Радиотехника. – 2000. – №3. – С. 9-20.

6. *Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В., Панас А.И., Пузиков Д.Ю., Старков С.О.* Прямохаотические системы связи // Успехи современной радиоэлектроники. – 2003. – №9. – С. 40-55.

7. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М., Панас А.И., Старков С.О.* Сверхширокополосные коммуникационные системы на основе динамического хаоса // Успехи современной радиоэлектроники. – 2008. – №1. – С. 4-16.

8. *Gonzalez-Miranda J. M*. Synchronization and control of chaos: An introduction for scientists and engineers. – London: Imperial College Press, 2004. – 224 p.

9. *Santoboni G., Bishop S.R., Varone A.* Transient time in unidirectional synchronization // International journal of bifurcation and chaos. – 1998. – Vol. 9. – № 12. – P. 2345-2352.

10. *Santoboni G., Varone A., Bishop S.R.* Spatial distribution of chaotic transients in unidirectional synchronization // Physics Letters A. – 1999. – Vol. 257. – P. 175-181.

11. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – № 2. – P. 130–141.