

УДК 621.391

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ МНОГОПУТЕВОЙ QoS-МАРШРУТИЗАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ СЕТЕВЫХ ИНТЕРФЕЙСОВ



[А.В. ЛЕМЕШКО](#), [А.С. ЕРЕМЕНКО](#)

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

**Abstract** – A dynamic representation of the multipath QoS-routing tensor model in the nonstationary mode of network interfaces operation is proposed. The novelty of the presented tensor model is that the space metric introduced in the telecommunications network structure was a function of time due to the geometrization and tensor generalization of the nonlinear differential equations of the network state, derived from the Pointwise Stationary Fluid Flow Approximation (PSFFA). As a result of the application of the proposed solutions conditions for ensuring Quality of Service in terms of the average packet end-to-end delay and packet rate for both stationary and nonstationary modes of the network interfaces during the routing tables update timer were obtained. In the research the influence of telecommunications network links utilization on the dynamics of average end-to-end delay was analyzed. It is shown that the duration of the nonstationary mode of the interface operation, characterized by the change of the average packet end-to-end delay and tending to take its steady-state value, depending on the links utilization can be comparable with the routing tables update timer, and in some cases even exceed it. It was found that the use of the proposed dynamic QoS-routing tensor model in the case of high utilization of the network routers interfaces allows to estimate adequately the selected Quality of Service parameters and as a result to perform a more effective management of the buffer and link resource of the telecommunications network.

**Анотація** – Запропоновано динамічне представлення тензорної моделі багатопулкової QoS-маршрутизації в нестационарному режимі роботи мережних інтерфейсів. Новизна запропонованої тензорної моделі полягає в тому, що метрика введеного на структурі телекомунікаційної мережі простору була функцією часу, оскільки геометризація та тензорному узагальненню підлягали нелінійні диференціальні рівняння стану мережі, отримані на основі використання стаціонарної точкової апроксимації нестационарного потоку (PSFFA). Застосування запропонованих рішень дозволило отримати умови забезпечення якості обслуговування за показниками середньої міжкінцевої затримки та швидкості передачі пакетів як для стаціонарного, так і нестационарного режимів роботи мережних інтерфейсів протягом таймера оновлення маршрутних таблиць.

**Аннотация** – Предложено динамическое представление тензорной модели многопутевой QoS-маршрутизации в нестационарном режиме работы сетевых интерфейсов. Новизна предложенной тензорной модели состоит в том, что метрика введенного на структуре телекоммуникационной сети пространства являлась функцией времени, т.к. геометризации и тензорному обобщению подлежали нелинейные дифференциальные уравнения состояния сети, полученные на основе использования стационарной точечной аппроксимации нестационарного потока (PSFFA). Применение предложенных решений позволило получить условия обеспечения качества обслуживания по показателям средней межконцевой задержки и скорости передачи пакетов как для стационарного, так и нестационарного режимов работы сетевых интерфейсов на протяжении таймера обновления маршрутных таблиц.

## Введение

Одним из ключевых факторов, в соответствии с которым современные телекоммуникационные сети (ТКС) относятся к классу сложных технических систем, является высокая динамичность протекающих в ней процессов информационного обмена и управления трафиком [1, 2]. Изменение во времени состояния ТКС, как правило, может быть вызвано нестационарным характером активности ее пользователей как с точки зрения числа запросов на обслуживание, так и типа используемого сетевого сервиса. Другими причинами динамики состояния сети могут служить выход из строя или перегрузка отдельных элементов ТКС, а для беспроводных сетей – изме-

нение сигнально-помеховой обстановки. При этом состояние ТКС чаще всего оценивают через структурные (число маршрутизаторов и каналов связи, характер топологии) и функциональные (загруженность каналов связи и очередей маршрутизаторов) сетевые параметры. В свою очередь, параметры состояния ТКС полностью определяют численные значения практически всех показателей межконцевого качества обслуживания (Quality of Service, QoS): от средней задержки и джиттера – до вероятности потерь пакетов и производительности ТКС в целом [3, 4].

В зависимости от типа и конфигурации сети изменение ее состояния может происходить в различном масштабе времени, что накладывает определенный отпечаток и на характер реакции соответствующих средств обеспечения QoS. Так, существующие механизмы профилирования трафика реагируют на возможные колебания интенсивности потока пакетов на границе сети с периодом в десятки-сотни миллисекунд, а известные протоколы маршрутизации модифицируют таблицы маршрутов пакетов спустя десятки секунд. При этом сами таймеры пересчета маршрутов, как правило, задаются административно (т.е. вручную), что может негативно повлиять на результат решения задач по обеспечению QoS. Именно возможность периодического или «по требованию» перерасчета маршрутных таблиц и определила тот факт, что подавляющее большинство современных маршрутных протоколов (RIP, OSPF, IS-IS, PNNI) именуются протоколами *динамической* маршрутизации, хотя они и основываются преимущественно на статических решениях – алгоритмах Дейкстры (Dijkstra) и Беллмана-Форда (Bellman-Ford) [5, 6], учитывающих лишь автономное состояние сети, характерное для определенного момента времени.

Отсутствие учета в явном виде фактора времени при оценке (расчете) параметров состояния ТКС может привести к ошибочным прогнозам значений QoS-показателей, ожидаемых в результате использования рассчитанных маршрутов. В этой связи актуальным представляется направление исследований, связанное с переходом к динамическим математическим моделям маршрутизации, способным обеспечить адекватный расчет искомых путей на основе анализа возможного изменения состояния ТКС во времени.

## **I. Анализ известных динамических моделей маршрутизации в ТКС**

Стоит отметить, что отечественными и зарубежными учеными, специализирующимися на проблемах математического моделирования ТКС, предложено и развито достаточно много оригинальных подходов, которые с разной степенью эффективности описывают динамику процессов маршрутизации в сети [7-13]. Так, в работе [7] предложено решение маршрутной задачи, в ходе которой динамика загруженности буферов очередей на маршрутизаторах телекоммуникационной сети была представлена системой неавтономных линейных дифференциальных уравнений. В работах [8-12] этот подход был развит в направлении перехода к разностным уравнениям, описывающим процесс маршрутизации в дискретном времени. Характерным примером применения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

для описания маршрутных задач также служит модель, предложенная в работах [13] и описывающая динамику изменения интенсивности потоков в каналах связи и загрузку очередей на маршрутизаторах ТКС.

При этом важно отметить, что динамическая модель маршрутизации должна быть максимально адаптирована под требования сетевых концепций Traffic Engineering, Load-Balancing Routing и QoS-based Routing [3-6], а именно:

- обеспечение балансировки нагрузки по путям как с одинаковой, так и различной метрикой;

- реализация многопутевой стратегии маршрутизации;

- поддержка качества обслуживания одновременно по множеству разнотипных показателей (временных, скоростных и показателей надежности).

Как показал проведенный анализ, первые два вида требований удовлетворяются в рамках известных решений [7-13], основанных на динамических моделях ТКС, в полном объеме. Эти динамические модели изначально ориентированы на реализацию многопутевой маршрутизации, а их развитие, предложенное в работах [11, 12], кроме того, способствует оптимальной балансировке нагрузки и использования канального и буферного ресурсов ТКС. Однако вывод условий обеспечения качества обслуживания одновременно по множеству разнотипных показателей при использовании динамических моделей пока остается нерешенной задачей.

Подобные условия были получены в работах [14-18] в ходе тензорного обобщения математических зависимостей для расчета, например, средней задержки [14, 15] и вероятности потерь пакетов [16-18] в стационарном режиме эргодической марковской цепи, характеризующей процесс обслуживания пакетов на интерфейсах маршрутизаторов ТКС. То есть эти расчетные зависимости справедливы лишь при достаточно длительном времени функционирования системы обслуживания ( $t \rightarrow \infty$ ) с неизменными значениями пропускной способности интерфейса и интенсивности поступающего на него потока пакетов, что для практики телекоммуникаций не всегда является приемлемым допущением. В этой связи актуальной представляется научная задача, связанная с разработкой динамической тензорной модели многопутевой QoS-маршрутизации, ориентированной на поддержку качества обслуживания одновременно по множеству разнотипных показателей в условиях изменения во времени состояния ТКС.

## II. Потокосая модель многопутевой маршрутизации

Основываясь на результатах, полученных в работах [16-18], пусть в рамках предлагаемой модели многопутевой маршрутизации структура ТКС описывается одномерной сетью  $S = (U, V)$ , где  $U = \{u_i, i = \overline{1, m}\}$  – множество узлов сети, моделируют маршрутизаторы сети, а  $V = \{v_z = (i, j); z = \overline{1, n}; i, j = \overline{1, m}; i \neq j\}$  – множество ветвей сети, при этом ветвь  $v_z = (i, j) \in V$  моделирует  $z$ -й канал связи, соединяющий  $i$ -й и  $j$ -й маршрутизаторы. Обозначим через  $\varphi_{(i, j)}$  пропускную способность канала  $(i, j)$ ,

измеряемую в пакетах в секунду (1/с), которая фактически является пропускной способностью  $j$ -го сетевого интерфейса на  $i$ -м маршрутизаторе ТКС.

В результате решения задачи многопутевой маршрутизации необходимо рассчитать множество маршрутных переменных  $x_{(i,j)}^k$ , каждая из которых характеризует долю интенсивности  $k$ -го потока ( $k \in K$ , где  $K$  – множество потоков в сети) в канале  $(i, j)$ . С целью предотвращения перегрузки каждого из маршрутизаторов и ТКС в целом необходимо выполнить условия сохранения потока [19]:

$$\begin{cases} \sum_{j:(i,j) \in V} x_{(i,j)}^k = 1, k \in K, i = s_k; \\ \sum_{j:(i,j) \in V} x_{(i,j)}^k - \sum_{j:(j,i) \in V} x_{(j,i)}^k = 0, k \in K, i \neq s_k, d_k; \\ \sum_{j:(j,i) \in V} x_{(j,i)}^k = -1, k \in K, i = d_k, \end{cases} \quad (1)$$

где  $s_k$  – маршрутизатор-отправитель,  $d_k$  – маршрутизатор-получатель для  $k$ -го потока пакетов.

При реализации многопутевой стратегии маршрутизации с балансировкой нагрузки на маршрутные переменные накладываются следующие ограничения:

$$0 \leq x_{(i,j)}^k \leq 1. \quad (2)$$

Для обеспечения управляемости процессом борьбы с перегрузкой в ходе маршрутизации потоков в модель вводится следующее выражение:

$$\sum_{k \in K} \lambda_{req}^k x_{(i,j)}^k < \varphi_{(i,j)}, \quad (i, j) \in V, \quad (3)$$

где  $\lambda_{req}^k$  – требования по средней скорости передачи пакетов (интенсивности)  $k$ -го потока, поступающего в сеть.

Выполнение условий (3) фактически означает, что коэффициент загрузки каждого канала связи должен быть меньше единицы:  $\rho < 1$  (где  $\rho = \lambda/\varphi$ ).

С целью расчета оптимального множества маршрутов в сети при расчете управляющих переменных пусть необходимо, например, минимизировать следующую целевую функцию:

$$J = \sum_{(i,j) \in V} \sum_{k \in K} h_{(i,j)}^x x_{(i,j)}^k, \quad (4)$$

где  $h_{(i,j)}^x$  – маршрутная метрика канала связи между  $i$ -м и  $j$ -м узлами ТКС.

### III. Динамическая модель загрузки очереди на интерфейсе маршрутизатора ТКС

Для придания разрабатываемой модели многопутевой маршрутизации свойств относительно обеспечения качества обслуживания важно располагать математическими выражениями, которые бы адекватно определяли численные значения выбранных QoS-показателей для произвольного режима работы интерфейса как для стационарного, так и для нестационарного (переходного) режимов. Проведенный анализ показал [20-24], что достаточно эффективным для описания динамики состояния ТКС является подход, основанный на использовании стационарной точечной аппроксимации нестационарного потока (Pointwise Stationary Fluid Flow Approximation, PSFFA). Именно с ее помощью можно охарактеризовать влияние характеристик потока и дисциплин обслуживания пакетов на динамику изменения средней длины очереди на маршрутизаторе телекоммуникационной сети [20]:

$$\dot{q}(t) = -f_{out}(t) + f_{in}(t), \quad (5)$$

где  $f_{in}(t) = \lambda(t)$  и  $f_{out}(t) = \varphi\rho(t)$  – интенсивности входящего и исходящего потоков соответственно на анализируемом интерфейсе. Тогда скорость изменения средней длины очереди на интерфейсе маршрутизатора ТКС примет вид:

$$\dot{q}(t) = -\varphi\rho(t) + \lambda(t). \quad (6)$$

Например, при моделировании работы интерфейса маршрутизатора системой массового обслуживания (СМО) M/G/1 (одноканальной системой массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и произвольным распределением времени обслуживания) выражение (6) примет вид нелинейного дифференциального уравнения:

$$\dot{q}(t) = -\varphi \left[ \frac{q(t) + 1 - \sqrt{q^2(t) + 2C_s^2 + 1}}{1 - C_s^2} \right] + \lambda(t), \quad (7)$$

где  $C_s^2$  – квадрат коэффициента вариации распределения времени обслуживания.

При этом в зависимости от значения  $C_s^2$  в рамках аппроксимации PSFFA могут определяться частные случаи модели M/G/1: M/M/1 (для  $C_s^2 = 1$ ), M/D/1 (для  $C_s^2 = 0$ ) и M/E<sub>k</sub>/1 (для  $C_s^2 = 1/k$ ,  $k \geq 1$ ) [20-22]. Тогда при моделировании работы  $j$ -го сетевого интерфейса на  $i$ -м маршрутизаторе ТКС с помощью СМО M/M/1, нелинейное дифференциальное уравнение (7), описывающее динамику изменения средней длины очереди на данном интерфейсе, примет следующую форму:

$$\frac{dq_{(i,j)}(t)}{dt} = -\varphi_{(i,j)} \left( \frac{q_{(i,j)}(t)}{q_{(i,j)}(t) + 1} \right) + \lambda_{(i,j)}, \quad (8)$$

где  $q_{(i,j)}(t)$  – средняя длина очереди на интерфейсе  $(i, j)$ ;  $\lambda_{(i,j)} = \sum_{k \in K} \lambda_{req}^k x_{(i,j)}^k$  – средняя интенсивность агрегированного потока пакетов на данном интерфейсе.

В свою очередь, согласно (8) и формуле Литтла, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, отражающих динамику изменения средней задержки пакетов на интерфейсах маршрутизаторов ТКС:

$$\frac{d\tau_{(i,j)}(t)}{dt} = 1 - \varphi_{(i,j)} \left( \frac{\tau_{(i,j)}(t)}{\lambda_{(i,j)}\tau_{(i,j)}(t) + 1} \right), \quad (i, j) \in V. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что в стационарном режиме работы интерфейса, т.е. при  $d\tau/dt = 0$  средняя задержка пакетов на интерфейсе будет рассчитываться по известной для СМО М/М/1 формуле:  $\tau = 1/(\varphi - \lambda)$ . Так, на рис. 1 показана динамика изменения средней длины очереди, а на рис. 2 – средней задержки пакетов на интерфейсе маршрутизатора для различных значений его пропускной способности и интенсивности потока пакетов.

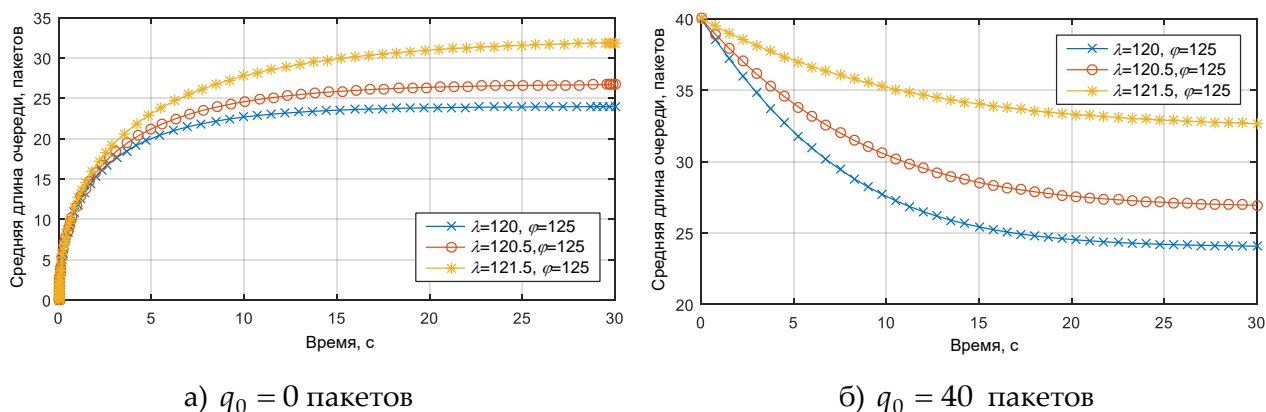


Рис. 1. Динамика изменения средней длины очереди при различном начальном состоянии интерфейса маршрутизатора

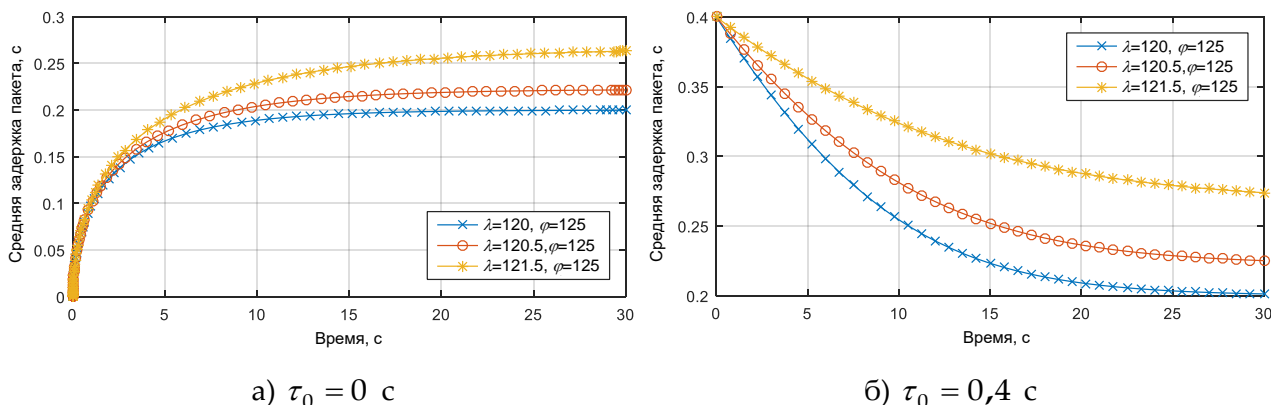


Рис. 2. Динамика изменения средней задержки пакетов при различном начальном состоянии интерфейса маршрутизатора

На этих рисунках показано два случая начального состояния интерфейса маршрутизатора телекоммуникационной сети. В первом случае (рис. 1 а) в начальный момент времени очередь на интерфейсе была пуста ( $q_0 = 0$ ), что соответствовало нулевой начальной задержке  $\tau_0 = 0$  с (рис. 2 а). Для второго случая (рис. 1 б) в начальный момент времени на интерфейсе было 40 пакетов ( $q_0 = 40$ ), что соответствовало, например, начальной средней задержке пакетов  $\tau_0 = 0,4$  с (рис. 2 б). Как свидетельствуют полученные результаты, средняя длина очереди и средняя задержка пакетов сходились к своим установившимся значениям в стационарном режиме, а начальное состояние интерфейса влияло лишь на характер и скорость переходного процесса, свойственного нестационарному режиму работы интерфейса.

Кроме того, необходимо отметить, что в первом случае (при  $\tau_0 = 0$  с) значения указанных параметров, полученных для стационарного режима, являются верхними граничными оценками, и ориентация на них приведет к перерасходу сетевого ресурса в ходе обеспечения требуемых значений QoS-показателей. Во втором случае (при  $\tau_0 = 0,4$  с) наблюдается противоположная ситуация: значения средней длины очереди и средней задержки пакетов, полученные для стационарного режима работы интерфейса, определяют уровень нижних границ этих параметров на интервале наблюдения, что на практике может привести к недооценке реальных значений QoS-показателей и невыполнению требований относительно качества обслуживания.

Результаты моделирования также показали, что при высокой загрузке интерфейса маршрутизатора ТКС (порядка  $\rho = 0,96...0,97$ ) средняя длина очереди, так же как и средняя задержка пакетов не достигали своих установившихся значений в рамках выбранного интервала наблюдения (времени функционирования интерфейса), который в рамках данного примера соответствовал таймеру обновления маршрутных таблиц в 30 с. Это в свою очередь демонстрирует случай, при котором недопустимо на практике использовать оценки QoS-показателей, получаемые для стационарного режима работы интерфейса.

#### IV. Тензорная модель многопутевой QoS-маршрутизации

В соответствии с методологией тензорного моделирования ТКС, предложенной в работах [14-18], структура сети определяет анизотропное пространство, образованное множеством контуров и узловых пар. Размерность этого пространства определяется общим числом ветвей в сети и равняется  $n$  [25]. При этом каждый независимый путь (ветвь, контур или узловая пара) определяет координатную ось в пространственной структуре. Как правило, ТКС моделируется связной одномерной сетью, т.е. содержит один связный компонент, тогда цикломатическое число  $\mu(S)$  и ранг  $\phi(S)$  сети определяют соответственно количество базисных контуров и узловых пар, для которых справедливы следующие выражения:

$$\phi(S) = m - 1, \mu(S) = n - m + 1, n = \phi(S) + \mu(S). \quad (10)$$

В выбранном пространстве телекоммуникационная сеть может быть представлена смешанным двухвалентным тензором

$$Q = T \otimes \Lambda, \quad (11)$$

где  $\otimes$  – оператор тензорного умножения, а компонентами тензора  $Q$  являются одновалентный ковариантный тензор средних задержек пакетов  $T$  и одновалентный контравариантный тензор интенсивностей потоков  $\Lambda$  в координатных путях сети.

Выражение (11) может быть записано в индексной форме:

$$q_j^i = \tau_j \lambda^i, \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (12)$$

где  $\tau_j$  – средняя задержка пакетов вдоль  $j$ -го координатного пути (с);  $\lambda^i$  – интенсивность потока пакетов, передаваемого вдоль  $i$ -го координатного пути (1/с).

В выбранном  $n$ -мерном пространстве тензор (11), (12) может быть задан в одной из двух систем координат. Первая – система координат (СК) ветвей сети  $\{v_k, k = \overline{1, n}\}$ , вторая – СК линейно независимых контуров  $\{\pi_i, i = \overline{1, \mu}\}$  и узловых пар  $\{\eta_j, j = \overline{1, \phi}\}$ , проекции тензора в которой будут обозначаться индексом  $\pi\eta$ .

В рамках тензорного подхода к моделированию ТКС ключевую роль играет вариантность используемых тензоров, которая определяет правила преобразования его координат при переходе от одной СК к другой. В работах [14-18] доказано, что параметры, связанные с законом сохранения, например, интенсивность потока или длина пакета (при решении задач фрагментации), являются контравариантными компонентами, тогда как аддитивные метрики, например, средняя задержка и джиттер пакетов – ковариантные компоненты тензора.

В качестве примера рассмотрим случай, когда процесс обслуживания пакетов агрегированного потока на сетевом интерфейсе маршрутизатора моделируется СМО М/М/1 (9). С помощью среды MatLab было получено решение дифференциального уравнения (9) в аналитическом виде:

$$\tau(t) = \frac{1}{\varphi - \lambda} \cdot [(\varphi \cdot W(0, -(\lambda \cdot \exp(-(\lambda + (t - (\lambda + \varphi \cdot \ln(\exp(-\lambda \cdot (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1)) / \varphi) \times (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1))) / (\varphi - \lambda)^2) \cdot (\varphi - \lambda)^2) / \varphi)) / \varphi) / \lambda + 1], \quad (i = \overline{1, n}), \quad (13)$$

где  $W(\cdot)$  – W-функция Ламберта;  $\exp(\cdot)$  – экспоненциальная функция;  $\tau_0$  – средняя задержка пакетов на интерфейсе маршрутизатора в начальный момент времени.

С целью дальнейшего тензорного обобщения на основании формулы (13) запишем выражения для расчета средней задержки пакетов конкретного потока, протекающего с интенсивностью  $\lambda_v^i$  в канале, моделируемом  $i$ -й ветвью:

$$\tau_i^v(t) = \frac{1}{\lambda_v^i (\varphi - \lambda)} \cdot [(\varphi \cdot W(0, -(\lambda \cdot \exp(-(\lambda + (t - (\lambda + \varphi \cdot \ln(\exp(-\lambda \cdot (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1)) / \varphi) \times (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1))) / (\varphi - \lambda)^2) \cdot (\varphi - \lambda)^2) / \varphi)) / \varphi) / \lambda + 1] \lambda_v^i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (14)$$

где индекс  $v$  указывает на тип используемой СК, т.е. все параметры в выражении (14) отнесены к СК ветвей сети.

В соответствии с постулатом второго обобщения, предложенного Кроном [25], система уравнений (14) может быть заменена следующим векторным уравнением

$$\Lambda_v(t) = G_v(t)T_v(t), \quad (15)$$

где  $\Lambda_v(t)$  и  $T_v(t)$  – проекции тензора  $\Lambda(t)$  и тензора  $T(t)$  в СК ветвей соответственно, представленные  $n$ -мерными векторами интенсивности потока и средней задержки пакетов в ветвях сети;  $G_v(t) = \|g_v^{ij}(t)\|$  – диагональная матрица  $n \times n$ , элементы которой рассчитываются согласно (14) и соответствуют ветвям  $\{v_i, i = \overline{1, n}\}$ , т.е.

$$g_v^{ii}(t) = \lambda_v^i(\varphi - \lambda) \cdot [(\varphi \cdot W(0, -(\lambda \cdot \exp(-(\lambda + (t - (\lambda + \varphi \cdot \ln(\exp(-(\lambda \cdot (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1)) / \varphi) \times (\tau_0 \lambda - \tau_0 \varphi + 1))) / (\varphi - \lambda)^2) \cdot (\varphi - \lambda)^2 / \varphi) / \varphi) / \lambda + 1)]^{-1}, (i = \overline{1, n}). \quad (16)$$

Согласно [24] правила координатного преобразования для тензоров линейны и могут быть формализованы несингулярной  $n \times n$  матрицей  $C$ :

$$\Lambda_v(t) = C \Lambda_{\pi\eta}(t), \quad (17)$$

где  $\Lambda_{\pi\eta}(t)$  –  $n$ -мерный вектор, являющийся проекцией тензора  $\Lambda(t)$  в СК контуров и узловых пар. В свою очередь вектор  $\Lambda_{\pi\eta}(t)$  включает компоненты:

$$\Lambda_{\pi\eta}(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_\pi(t) \\ - \\ \Lambda_\eta(t) \end{bmatrix}; \quad \Lambda_\pi(t) = \begin{bmatrix} \lambda_\pi^1(t) \\ \vdots \\ \lambda_\pi^j(t) \\ \vdots \\ \lambda_\pi^\mu(t) \end{bmatrix}; \quad \Lambda_\eta(t) = \begin{bmatrix} \lambda_\eta^1(t) \\ \vdots \\ \lambda_\eta^p(t) \\ \vdots \\ \lambda_\eta^\phi(t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $\Lambda_\pi(t)$  –  $\mu$ -мерный вектор интенсивностей потока в контурах сети;  $\Lambda_\eta(t)$  –  $\phi$ -мерный вектор интенсивностей потока между узловыми парами сети;  $\lambda_\pi^j(t)$  – интенсивность потока в контуре  $\pi_j$  сети;  $\lambda_\eta^p(t)$  – интенсивность потока, поступающего в сеть и исходящего из сети через узловую пару  $\eta_p$ .

Проекция тензора средних задержек пакетов  $T(t)$  в системе координат контуров и узловых пар представляется  $n$ -мерным вектором со следующей структурой:

$$T_{\pi\eta}(t) = \begin{bmatrix} T_\pi(t) \\ - \\ T_\eta(t) \end{bmatrix}; \quad T_\pi(t) = \begin{bmatrix} \tau_1^\pi(t) \\ \vdots \\ \tau_j^\pi(t) \\ \vdots \\ \tau_\mu^\pi(t) \end{bmatrix}; \quad T_\eta(t) = \begin{bmatrix} \tau_1^\eta(t) \\ \vdots \\ \tau_p^\eta(t) \\ \vdots \\ \tau_\phi^\eta(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где  $\tau_j^\pi(t)$ ,  $\tau_p^\eta(t)$  – средние задержки пакетов в контуре  $\pi_j$  и между узловой парой  $\eta_p$  соответственно. Векторы  $T_\pi(t)$  и  $T_\eta(t)$  имеют размерность  $\mu$  и  $\phi$  соответственно.

Ковариантный характер тензора  $T(t)$  определяет следующий вид закона координатного преобразования:

$$T_v(t) = A T_{\pi\eta}(t), \quad (20)$$

где  $A$  –  $n \times n$  матрица ковариантного координатного преобразования при переходе от СК контуров и узловых пар к СК ветвей.

Матрица  $A$  связана с матрицей  $C$  (матрица контравариантного координатного преобразования) условием ортогональности  $CA^t = I$ ; где  $I$  – единичная матрица размера  $n \times n$ ,  $[\cdot]^t$  – оператор транспонирования.

Проекции тензоров средних задержек пакетов и интенсивностей потока в СК контуров и узловых пар связаны выражением, аналогичным выражению (15) [14-18]:

$$\Lambda_{\pi\eta}(t) = G_{\pi\eta}(t) T_{\pi\eta}(t). \quad (21)$$

Согласно обратному тензорному признаку тензор  $G$  – это дважды контравариантный метрический тензор, проекции которого при смене координатной системы его рассмотрения преобразуется следующим образом:

$$G_{\pi\eta}(t) = A^t G_v(t) A, \quad (22)$$

где  $G_{\pi\eta}(t)$  – проекция тензора  $G(t)$  в СК контуров и узловых пар. Координаты этой матрицы являются функцией времени, т.к. координаты  $G_v$  (16) зависят от времени наблюдения за состоянием интерфейса.

Располагая детальной структурой векторов (18) и (19), а также учитывая, что внешний трафик в транзитных маршрутизаторах отсутствует, а контурные задержки для избегания закливания пакетов необходимо приравнять к нулю ( $T_\pi(t) = 0$ ), в работах [14-18] из выражения (21) получены условия обеспечения качества обслуживания по средней задержке  $\tau_{\langle req \rangle}$  и скорости передачи пакетов  $\lambda^{\langle req \rangle}$ :

$$\lambda^{\langle req \rangle} \leq \left( G_{\pi\eta}^{\langle 4,1 \rangle}(t) - G_{\pi\eta}^{\langle 4,2 \rangle}(t) \left[ G_{\pi\eta}^{\langle 4,4 \rangle}(t) \right]^{-1} G_{\pi\eta}^{\langle 4,3 \rangle}(t) \right) \tau_{\langle req \rangle} \quad (23)$$

при

$$G_{\pi\eta}(t) = \left\| \begin{array}{cc} G_{\pi\eta}^{\langle 1 \rangle}(t) & | & G_{\pi\eta}^{\langle 2 \rangle}(t) \\ \text{---} & + & \text{---} \\ G_{\pi\eta}^{\langle 3 \rangle}(t) & | & G_{\pi\eta}^{\langle 4 \rangle}(t) \end{array} \right\|; \quad G_{\pi\eta}^{\langle 4 \rangle}(t) = \left\| \begin{array}{cc} G_{\pi\eta}^{\langle 4,1 \rangle}(t) & | & G_{\pi\eta}^{\langle 4,2 \rangle}(t) \\ \text{---} & + & \text{---} \\ G_{\pi\eta}^{\langle 4,3 \rangle}(t) & | & G_{\pi\eta}^{\langle 4,4 \rangle}(t) \end{array} \right\|,$$

где  $G_{\pi\eta}^{\langle 1 \rangle}(t)$  и  $G_{\pi\eta}^{\langle 4 \rangle}(t)$  – квадратные подматрицы размера  $\mu \times \mu$  и  $\phi \times \phi$  соответственно,  $G_{\pi\eta}^{\langle 2 \rangle}(t)$  – подматрица размера  $\mu \times \phi$ ,  $G_{\pi\eta}^{\langle 3 \rangle}(t)$  – подматрица размера  $\phi \times \mu$ ;  $G_{\pi\eta}^{\langle 4,1 \rangle}(t)$  – первый элемент матрицы  $G_{\pi\eta}^{\langle 4 \rangle}(t)$ ;  $[\cdot]^{-1}$  – операция обращения матрицы.

Как показано в работах [14-18], выполнение требований относительно  $T_{\pi} = 0$  также гарантирует минимальную и одинаковую для всех путей межконцевую задержку для выбранной пары отправитель-получатель пакетов. Это также способствует минимизации многопутевого джиттера (вариации задержки) пакетов.

Сами условия (23) ввиду их инвариантного характера, что свойственно тензорной методологии исследования, остались неизменными. Но расчет координат матриц – проекций метрического тензора  $G$  существенно видоизменен, а согласно выражениям (16) и (22) теперь они являются функциями времени. Это позволяет иметь в распоряжении более точные оценки относительно выполнения (невыполнения) условий обеспечения качества обслуживания в каждый конкретный момент времени функционирования интерфейса, а не только для стационарного режима его работы, который в рамках выбранного таймера перерасчета маршрутных таблиц может и не наступить (рис. 2).

## V. Исследование предложенной динамической тензорной модели многопутевой QoS-маршрутизации в различных режимах работы сетевых интерфейсов

Продемонстрируем особенности решения задачи QoS-маршрутизации с использованием динамической тензорной модели (1)-(23) для примера сетевой структуры, показанной на рис. 3. Сеть состоит из пяти маршрутизаторов и шести каналов связи (рис. 3). В разрывах каналов связи указаны их пропускные способности. Предположим, что пакеты передаются от первого маршрутизатора к пятому.

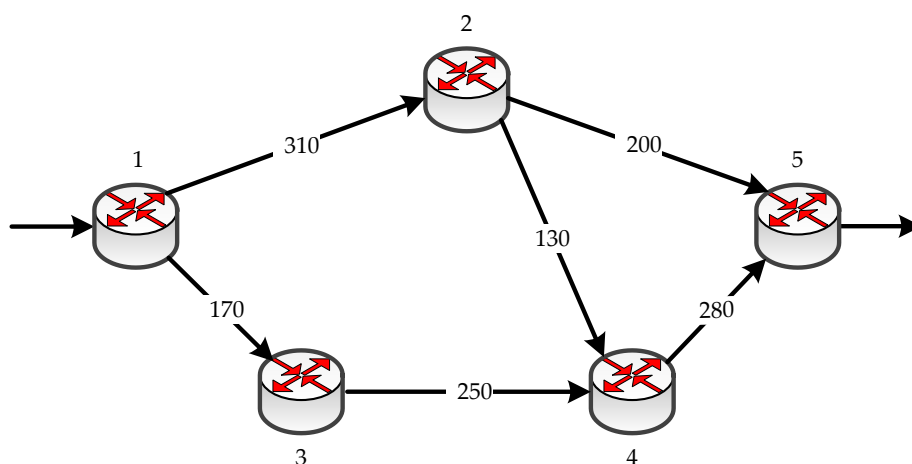


Рис. 3. Пример исходной структуры телекоммуникационной сети

В ходе исследования проводился анализ влияния загруженности каналов связи ( $\rho$ ) и сети в целом на динамику изменения средней межконцевой задержки пакетов. В табл. 2 приведены три варианта QoS-требований к скорости передачи ( $\lambda^{req}$ ) и средней межконцевой задержке пакетов ( $\tau_{req}$ ).

Таблица 1. Варианты QoS-требований к скорости передачи пакетов и средней межконцевой задержке пакетов

Номер варианта расчета	Требования к скорости передачи пакетов, $\lambda^{(req)}$	Требования к средней межконцевой задержке пакетов, $\tau_{\langle req \rangle}$
1	450 1/с	150 мс
2	460 1/с	220 мс
3	470 1/с	410 мс

В процессе расчёта предполагалось, что начальные значения средней задержки пакетов ( $\tau_0$ ) на каждом из интерфейсов маршрутизаторов сети были известны (табл. 2).

Таблица 2. Начальные значения средней задержки пакетов на каждом из интерфейсов маршрутизаторов сети

Номер интерфейса	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(2, 5)	(4, 5)
$\tau_0$	150 мс	200 мс	100 мс	300 мс	250 мс	100 мс

В случае, когда принимались во внимание QoS-требования для первого варианта расчета (табл. 1), использование условия (23) для момента времени  $t=30$  с был обеспечен такой порядок многопутевой маршрутизации пакетов потока (рис. 4), при котором средняя межконцевая задержка, вычисленная вдоль всех (трех) путей, была одинаковой и равной 146,2 мс. Численные значения, указанные в разрывах каналов связи, имеют следующий смысл (сверху вниз): интенсивность потока пакетов / пропускная способность канала связи / средняя задержка пакетов.

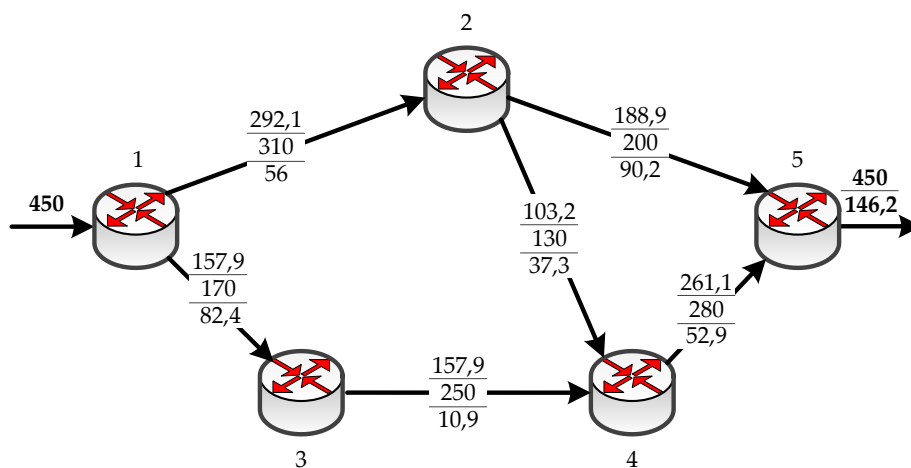
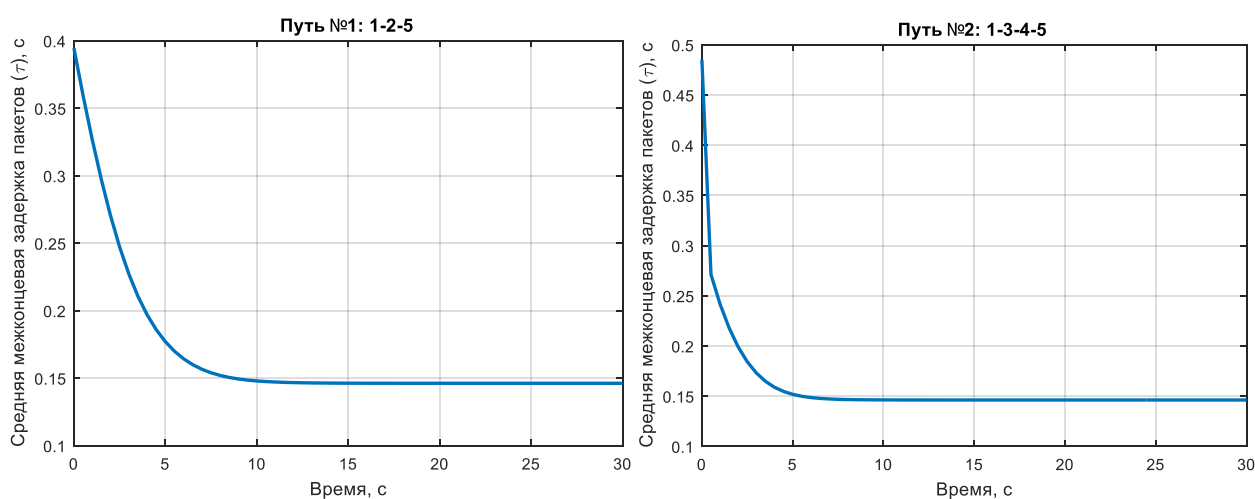


Рис. 4. Порядок многопутевой QoS-маршрутизации в моделируемой сети при  $\lambda^{(req)} = 450$  1/с и  $\tau_{\langle req \rangle} = 150$  мс (средняя задержка на интерфейсах получена на момент времени 30 с)

При этом характеристика рассчитанных путей, полученных согласно модели (1)-(23), следующая (рис. 4):

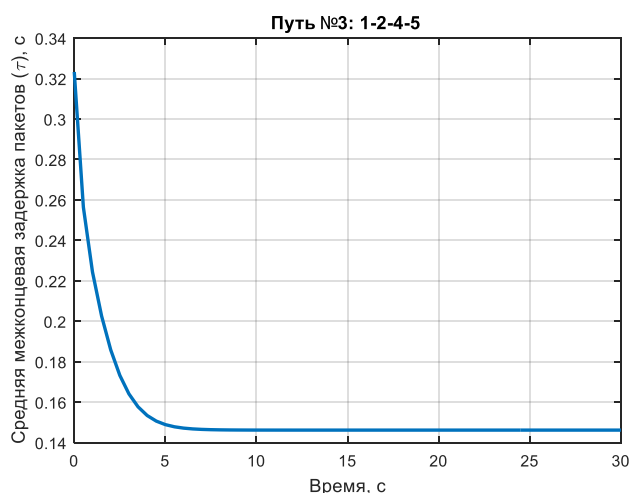
- путь №1: 1→2→5; интенсивность потока пакетов – 188,9 1/с; средняя межконцевая задержка в стационарном режиме работы интерфейса– 146,2 мс;
- путь №2: 1→3→4→5; интенсивность потока пакетов – 157,9 1/с; средняя межконцевая задержка в стационарном режиме работы интерфейса – 146,2 мс;
- путь №3: 1→2→4→5; интенсивность потока пакетов – 103,2 1/с; средняя межконцевая задержка в стационарном режиме работы интерфейса – 146,2 мс.

Для этого варианта исходных данных коэффициент загрузки каналов связи ( $\rho$ ) изменялся в диапазоне от 0,63 до 0,94, а средняя межконцевая задержка пакетов (рис. 5) сходилась к своему предельному значению в стационарном режиме (146,2 мс) от 8 с (для пути №3) до 15 с (для пути №1).



а) для первого пути

б) для второго пути



в) для третьего пути

Рис. 5. Динамика изменения средней межконцевой задержки пакетов вдоль всех трех путей передачи пакетов на протяжении таймера длительностью 30 с (значение средней межконцевой задержки для каждого пути в стационарном режиме 146,2 мс при  $\rho=0,63\dots0,94$ )

Пусть таймер обновления маршрутных таблиц составляет, например, 30 с (в соответствии с протоколом маршрутизации RIP), т.е. в течение этого времени порядок маршрутизации пакетов не изменяется. Тогда расхождение в значениях средней задержки пакетов, полученных в переходном и стационарном режимах, составляло в среднем от 21,6 % (для третьего пути) до 31,5 % (для первого пути) на протяжении от 26 % до 48 % от длительности таймера.

С увеличением нагрузки на сеть, т.е. при реализации QoS-требований, соответствующих второму варианту расчета (табл. 1), обеспечивался порядок многопутевой маршрутизации пакетов (рис. 6), при котором их средняя межконцевая задержка, вычисленная вдоль всех (трех) путей, была равна 212,3 мс.

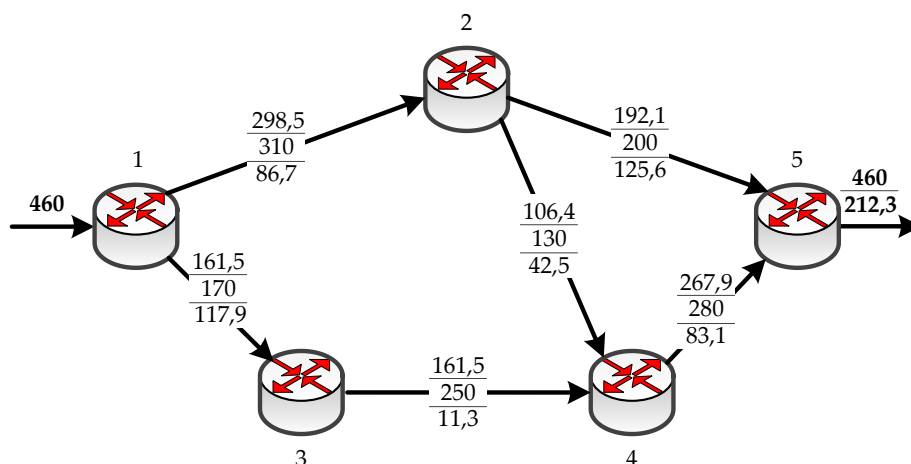
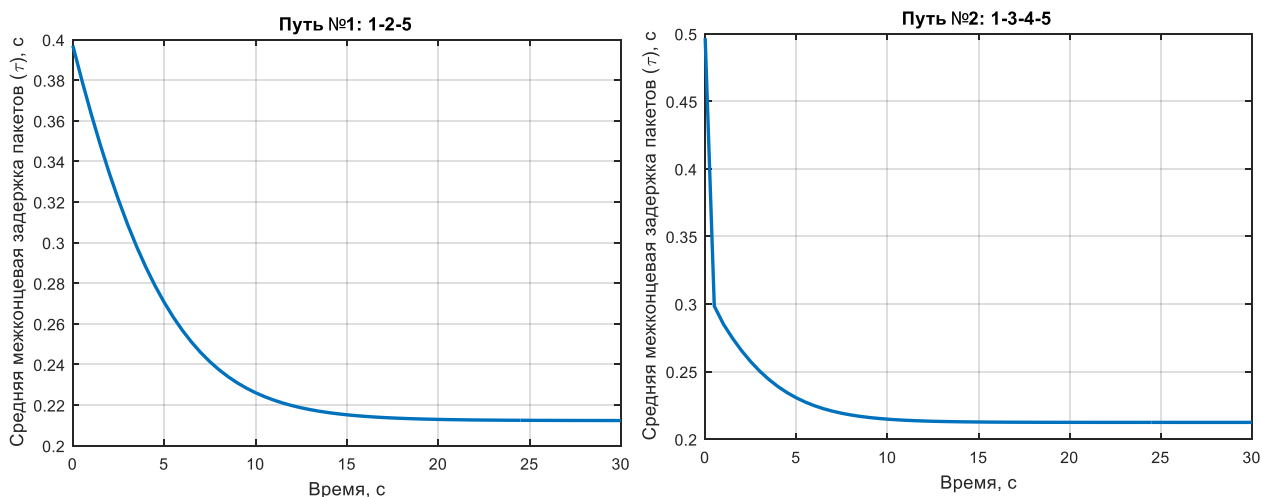


Рис. 6. Порядок многопутевой QoS-маршрутизации в моделируемой сети при  $\lambda^{(req)} = 460$  1/с и  $\tau_{(req)} = 220$  мс (средняя задержка на интерфейсах получена на момент времени 30 с)

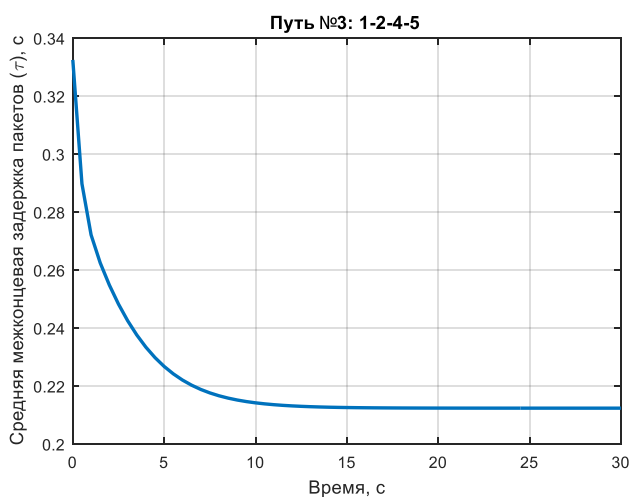
В этом случае коэффициент загруженности каналов связи сети уже варьировался в пределах  $\rho = 0,65...0,96$ , а средняя межконцевая задержка пакетов (рис. 7) сходилась к своему стационарному значению (212,3 мс) на протяжении от 14 с до 20 с, что уже составляло от 47% до 67% от длительности таймера обновления маршрутных таблиц. В этом случае расхождение в значениях средней задержки пакетов, полученных в переходном и стационарном режимах, составляло в среднем от 9,4% (для третьего пути) до 19,1% (для первого пути).

При дальнейшем повышении загруженности сети ( $\lambda^{(req)} = 470$  1/с,  $\rho = 0,66...0,98$ ), что соответствовало результатам третьего варианта расчета (табл. 1), средняя межконцевая задержка пакетов (рис. 8) в течение длительности таймера (периода наблюдения 30 с) не успевала сходиться к своему стационарному значению для всех рассматриваемых маршрутов.



а) для первого пути

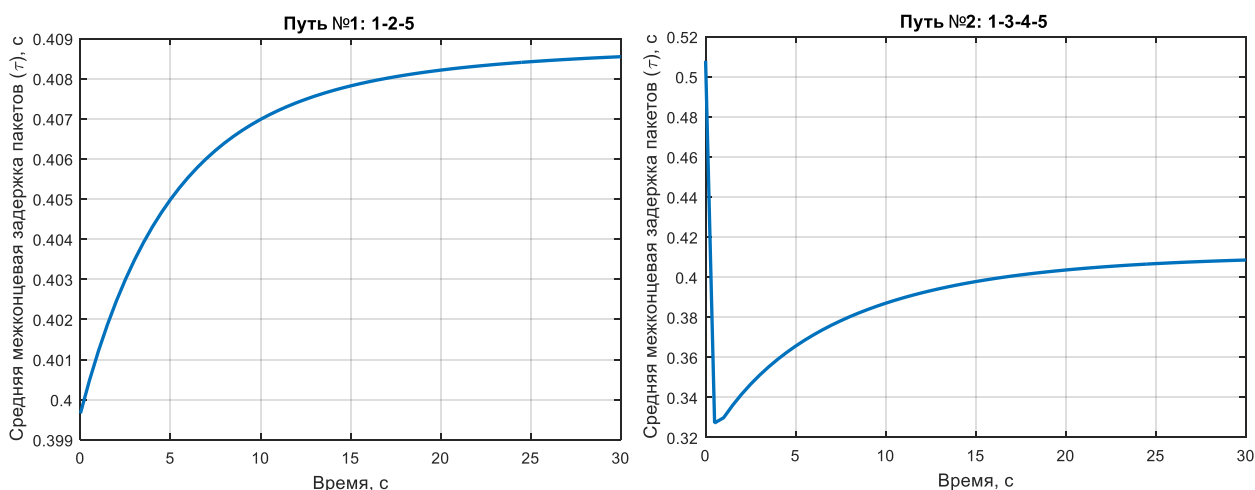
б) для второго пути



в) для третьего пути

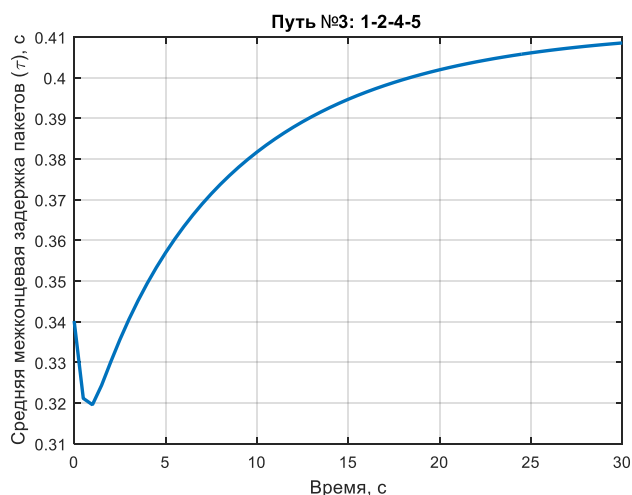
Рис. 7. Динамика изменения средней межконцевой задержки пакетов вдоль всех трех путей передачи пакетов на протяжении таймера длительностью 30 с (значение средней межконцевой задержки для каждого пути в установившемся режиме 212,3 мс при  $\rho=0,65\dots0,96$ )

Кроме того, в отличие от первых двух рассмотренных случаев при высокой загрузке интерфейсов в нестационарном режиме их работы наблюдались элементы колебательного процесса (рис. 8 б и рис. 8 в) в изменении средней межконцевой задержки пакетов на протяжении таймера обновления маршрутных таблиц. В результате подобные факторы на практике могут вызвать непредсказуемые последствия при обеспечении качества обслуживания по выбранным показателям, оцениваемым для стационарного режима. В этом случае расхождение в значениях средней задержки пакетов составляло в среднем от 0,41% (для первого пути) до 5,93% (для третьего пути), что определялось близостью начальных значений средней задержки пакетов на интерфейсах (табл. 2) и ее значений на исходе маршрутного таймера (30 с).



а) для первого пути

б) для второго пути



в) для третьего пути

Рис. 8. Динамика изменения средней межконцевой задержки пакетов вдоль всех трех путей передачи пакетов на протяжении таймера длительностью 30 с (значение средней межконцевой задержки для каждого пути в момент времени наблюдения 30 с составляло 408,5 мс при  $\rho=0,66...0,98$ )

В качестве примера на рис. 9 показан порядок многопутевой маршрутизации пакетов, при котором средняя межконцевая задержка, вычисленная вдоль всех (трех) путей на момент времени 30 с, была равна 408,5 мс.

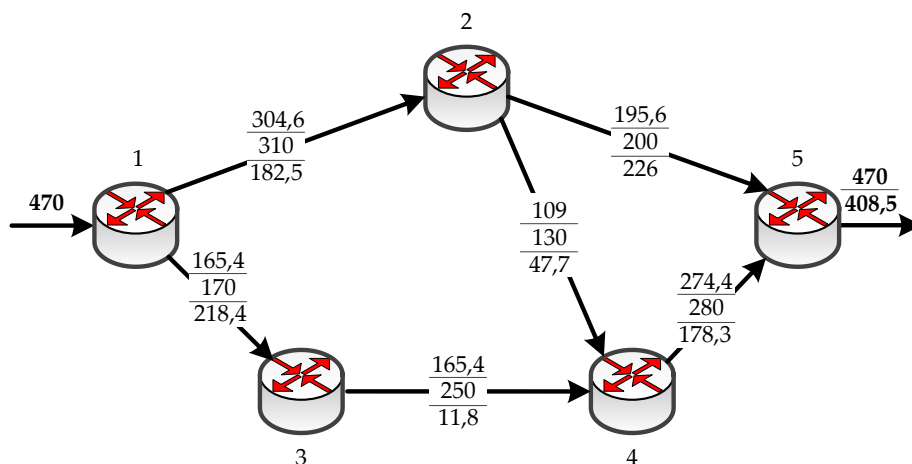


Рис. 9. Порядок многопутевой QoS-маршрутизации в моделируемой сети при  $\lambda^{(req)} = 470$  1/с и  $\tau_{(req)} = 410$  мс (средняя задержка на интерфейсах получена на момент времени 30 с)

## Выводы

В связи с тем, что обеспечение качества обслуживания в ТКС является процессом реального времени, важно производить решение задач маршрутизации с помощью динамических моделей телекоммуникационной сети. В соответствии с этим в статье предложено динамическое представление тензорной модели многопутевой QoS-маршрутизации в нестационарном режиме работы сетевых интерфейсов. Новизна предложенной тензорной модели состоит в том, что метрика введенного на структуре ТКС пространства являлась функцией времени (16), т.к. геометризации и тензорному обобщению подлежали нелинейные дифференциальные уравнения состояния сети, полученные на основе использования стационарной точечной аппроксимации нестационарного потока (PSFFA). В итоге применение предложенных решений позволило получить условия обеспечения качества обслуживания по показателям средней межконцевой задержки и скорости передачи пакетов как для стационарного, так и нестационарного режимов работы сетевых интерфейсов на протяжении таймера обновления маршрутных таблиц.

В ходе исследования показана работоспособность предложенной модели (1)-(23), а также проанализировано влияние загруженности каналов связи ТКС на характер динамики изменения средней межконцевой задержки. Показано, что длительность нестационарного режима работы интерфейса, характеризующегося изменением во времени средней межконцевой задержки пакетов и стремлением к своему стационарному значению, в зависимости от загруженности каналов связи ( $\rho$ ) может быть соизмерима с таймером пересчета маршрутных таблиц (рис. 5, рис. 7), а в некоторых случаях (рис. 8) и превышать его. Таким образом, ранее известные решения, полученные в ходе тензорного обобщения математических выражений для расчета основных QoS-показателей в стационарном режиме работы интерфейса, можно использовать лишь при низкой загруженности каналов связи сети для получения пре-

дельных оценок. В рамках рассмотренного примера при высокой загруженности сетевых интерфейсов маршрутизаторов ( $\rho$  от 0,63 и выше) целесообразно использовать предложенную динамическую тензорную модель QoS-маршрутизации, что позволит адекватно оценить выбранные показатели качества обслуживания и, как результат, способствовать более эффективному управлению буферным и канальным ресурсами ТКС. Предложенная модель может быть использована как при решении задач анализа основных показателей качества обслуживания, так и при решении задач синтеза, т.е. при разработке перспективных протоколов QoS-маршрутизации и управления трафиком в современных мультисервисных ТКС.

### Список литературы:

1. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / За загал. ред. В.В. Поповського. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.
2. Багатоканальний електров'язок та телекомунікаційні технології: Підручник у 2-х ч. Ч. 1 / О.В. Лемешко, В.В. Поповський, В.А. Лошаков та ін., за ред. В.В. Поповського. – Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2010. – 470 с.
3. *Szigeti T., Hattingh C., Barton R., Briley K.* End-to-End QoS Network Design: Quality of Service for Rich-Media & Cloud Networks, 2nd Edition // Cisco Press. – 2013. – 1040 p.
4. *Marsic I.* Computer Networks: Performance and Quality of Service // Rutgers University. – 2013. – 500 p.
5. *Medhi D., Ramasamy K.* Network routing: algorithms, protocols, and architectures. – Morgan Kaufmann Publishers, 2007. – 788 p.
6. *Остерлох Х.* Маршрутизация в IP-сетях. Принципы, протоколы, настройка. – С.Пб.: BHV-С.Пб., 2002. – 512 с.
7. *Segall A.* The modeling of adaptive routing in data communications networks // IEEE Trans. on communications. – 1975. –Vol. 25, № 1. – P.85 – 95.
8. *Поповский В.В., Лемешко А.В., Евсеева О.Ю.* Математические модели телекоммуникационных систем. Часть 1. Математические модели функциональных свойств телекоммуникационных систем [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2011. – № 2 (4). – С. 3 – 41. – Режим доступа до журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2011/2/1/112\\_popovsky\\_functional.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2011/2/1/112_popovsky_functional.pdf).
9. *Поповский В.В., Лемешко А.В., Евсеева О.Ю.* Динамическое управление ресурсами ТКС: математические модели в пространстве состояний // Наукові записки УНДІЗ. – 2009. – №1(9). – С. 3-26.
10. *Лемешко А.В., Беленков А.Г.* Динамическая модель комплексного решения задач маршрутизации и абонентского доступа в территориально-распределенных телекоммуникационных сетях // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2003. – Вып. 18. – С. 134 – 139.
11. *Лемешко О.В., Евсеева О.Ю., Симоненко Д.В.* Модель динамічного балансування мережних ресурсів у телекомунікаційній мережі // Системи обробки інформації. – 2008. – Вип. 5(72). – С. 71-74.
12. *Лемешко А.В., Симоненко Д.В.* Динамическая модель балансировки буферных и канальных ресурсов транспортной сети телекоммуникационной системы [Электронный ре-

сурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2010. – № 2 (2). – С. 42 – 49. – Режим доступа до журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2010/2/2/102\\_lemeshko\\_dynamic.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2010/2/2/102_lemeshko_dynamic.pdf).

13. Гуревич И.М. Динамическая модель сети связи // Теория телетрафика в системах информатики. – М.: Наука, 1989. – С.54-64.

14. Лемешко А.В. Вероятностно-временная модель QoS маршрутизации с предвычислением путей в условиях неидеальной надежности элементов телекоммуникационной сети // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2005. – Вып. 142. – С. 11-20.

15. Lemeshko O.V., Yevseyeva O.Yu., Garkusha S.V. A Tensor Model of Multipath Routing Based on Multiple QoS Metrics // 2013 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings. – Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12–13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR. – P. 1-4.

16. Лемешко А.В., Евсеева О.Ю. Тензорная модель многопутевой маршрутизации с гарантиями качества обслуживания одновременно по множеству разнородных показателей [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 4 (9). – С. 16 - 31. – Режим доступа до журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124\\_lemeshko\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124_lemeshko_tensor.pdf).

17. Lemeshko A.V., Evseeva O.Yu., Garkusha S.V. Research on Tensor Model of Multipath Routing in Telecommunication Network with Support of Service Quality by Greater Number of Indices // Telecommunications and RadioEngineering. – 2014. – Vol. 73, No 15. – P. 1339-1360.

18. Lemeshko O.V., Garkusha S.V., Yeremenko O.S., Hailan A.M. Policy-based QoS management model for multiservice networks // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), 21-23 May 2015, Omsk, Russia. Publisher: IEEE. – P. 1-4.

19. Seok Y., Lee Y., Kim C., Choi Y. Dynamic Constrained Multipath Routing for MPLS Networks // IEEE International Conference on Computer Communications and Networks. – 2001. – №3. – P. 348 – 353.

20. Xu K., Tipper D., Qian Y., Krishnamurthy P., Tipmongkonsilp S. Time-Varying Performance Analysis of Multihop Wireless Networks With CBR Traffic // IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY. – 2014. – VOL. 63, NO. 7. – PP. 3397–3409.

21. Alnowibet K.A. Nonstationary Erlang Loss Queues and Networks // PhD Thesis, North Carolina State University, 2004. – 140 p.

22. Wang W., Tipper D., Banerjee S. A Simple Approximation for modeling Nonstationary Queues // Proceedings of the Fifteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer Societies (INFOCOM '96). – 1996. – V.1. – P. 255–262.

23. Еременко А.С., Лебеденко Т.М., Старкова Е.В. Анализ влияния состояния интерфейса на динамику загруженности очереди на маршрутизаторе телекоммуникационной сети // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2015. – №3. – С. 45-51.

24. Yeremenko O.S., Lebedenko T.M., Vavenko T.V., Semenyaka M.V. Investigation of Queue Utilization on Network Routers by the Use of Dynamic Models // Second International IEEE Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T-2015). Proceedings. – Kharkiv: Kharkiv National University of Radio Electronics. Ukraine, Kharkiv, October 13–15, 2015. – P. 46-49.

25. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.